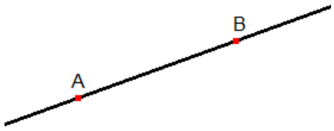
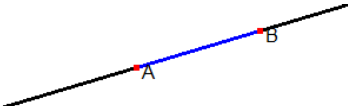
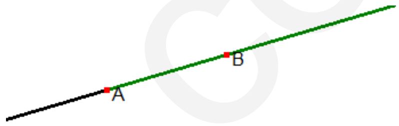
# S11C. Autour de la GEOMETRIE PLANE Corrigé
# Vocabulaire et constructions de base

## Mise en route

**1.** **(AB)** représente la droite (*en noir*) qui passe par A et B, **[AB]** représente le segment (*en bleu*) d'extrémités A et B, **[AB)** la demi-droite (*en vert*) d'origine A passant par B, **AB** la longueur du segment [AB]. On écrit par exemple $AB = 5cm$

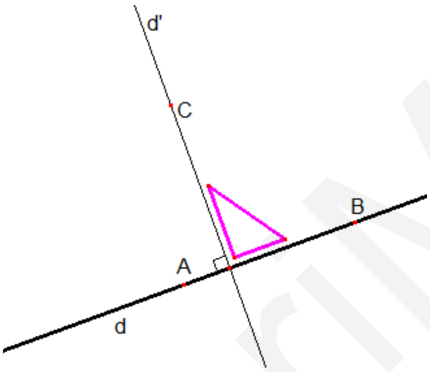


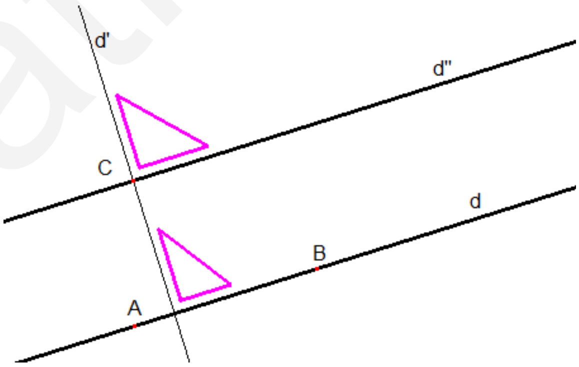




**2.** A *la règle et à l'équerre*

Pour tracer la droite $d'$ perpendiculaire à la droite (AB) passant par C, on trace un angle droit ayant d'une part pour côté la droite *d*, et d'autre part l'autre côté passant par C.




Pour tracer la droite $d''$ parallèle à la droite (AB) passant par C, on peut utiliser la droite *d'* précédemment tracée (ou tout autre perpendiculaire à (AB)) et tracer une droite perpendiculaire à *d'* passant par C.

*En effet, deux droites perpendiculaires à une même droite d sont parallèles entre elles.*

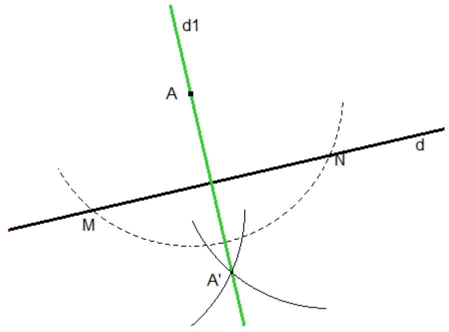
Remarque : il ne s'agit pas de *règle graduée*, on ne peut donc pas mesurer l'écart entre les deux droites parallèles, ici AC, et le reporter à partir de B.

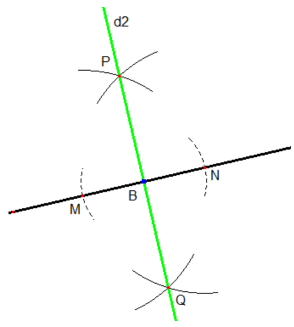
**3.** Tracé à *la règle et au compas*

Pour construire la droite $d_1$ perpendiculaire à la droite (*d*) passant par A, lorsque A n'appartient pas à la droite (*d*), on construit un segment porté par la droite *d*, tel que sa médiatrice passe par A.

*En effet, la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment en son milieu.*

Pour construire la droite $d_2$ perpendiculaire à la droite (*d*) passant par B, lorsque B appartient à la droite (*d*), on construit la médiatrice d'un segment porté par *d* ayant pour milieu le point B.




**Programme de construction au compas de la droite perpendiculaire à une droite donnée** :

Soit *d* une droite et un point A extérieur à *d*.

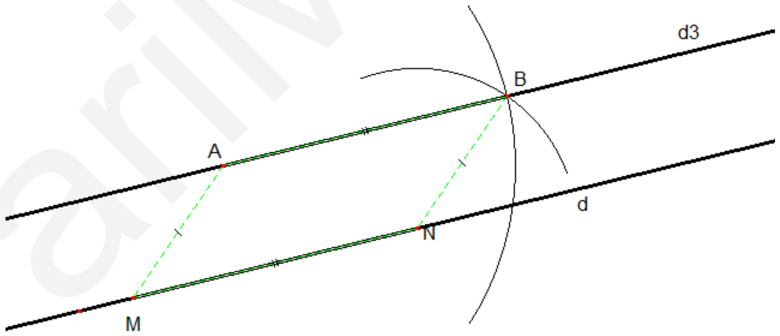
- Tracer un arc de cercle de centre A ; cet arc coupe la droite *d* en deux points M et N équidistants de A.
- Construire un autre point équidistant de M et N, en traçant deux arcs de cercle de centre M et de centre N de même rayon. La droite (AA') est la médiatrice de [MN] donc perpendiculaire à *d*.

Soit *d* une droite et un point B situé sur *d*.

- Tracer deux arcs de cercle de centre B, de même rayon qui coupent la droite *d* en deux points M et N.
- Tracer deux arcs de cercle de même rayon, de part et d'autre de *d* de centre M puis de centre N.
- Ces deux arcs se coupent deux à deux en deux points P et Q qui sont équidistants de M et N.

La droite (PQ) est donc la médiatrice du segment [MN], donc perpendiculaire à *d* en B.

Pour construire **au compas** la droite $d_3$ parallèle à la droite (*d*) passant par A, lorsque A n'appartient pas à la droite (*d*), on peut soit refaire les constructions successives de deux perpendiculaires, soit s'appuyer sur une propriété du parallélogramme[1] : deux droites parallèles peuvent être le support de deux côtés opposés d'un parallélogramme.




**Programme de construction au compas de la droite parallèle à une droite donnée :**

Soit *d* une droite et A extérieur à *d*.

- Placer sur *d* deux points M et N.
- Tracer un arc de cercle de centre N de rayon AM, puis un arc de cercle de centre A de rayon MN.
- Ces deux arcs se coupent en B. La droite (AB) est parallèle à *d*.

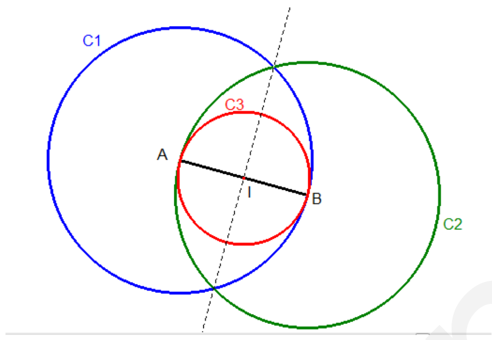
*En effet le quadrilatère AMNB a ses côtés opposés de même longueur c'est donc un parallélogramme.*

*Si un quadrilatère est un parallélogramme, il a ses côtés opposés parallèles.*

[1] Cette construction est souvent moins spontanée, mais il faut la connaître. Elle est d'ailleurs plus rapide.

**4.** A *la règle et au compas*

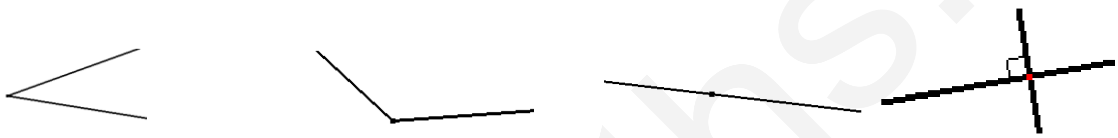
- le cercle $C_1$ de centre A passant par B.
- le cercle $C_2$ de centre B de rayon [AB].
- le cercle $C_3$ de diamètre [AB].



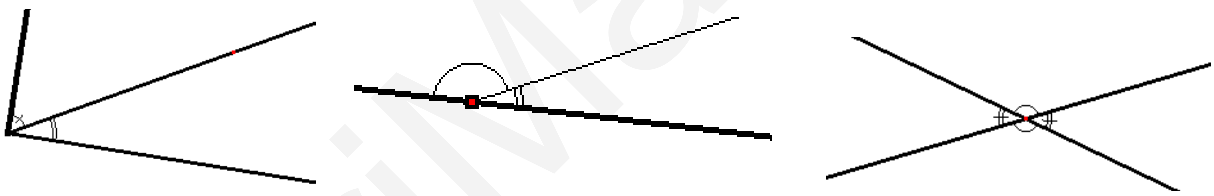

Pour tracer un cercle de diamètre [AB] donné, on construit la médiatrice de [AB] au compas pour déterminer le centre I du cercle. Ici la médiatrice de [AB] passe par les deux points d'intersection des cercles $C_1$ *et* $C_2$ ; ils sont en effet à égale distance de A et de B puisque les deux cercles ont même rayon AB.

**5.** *A main levée, sans rapporteur*

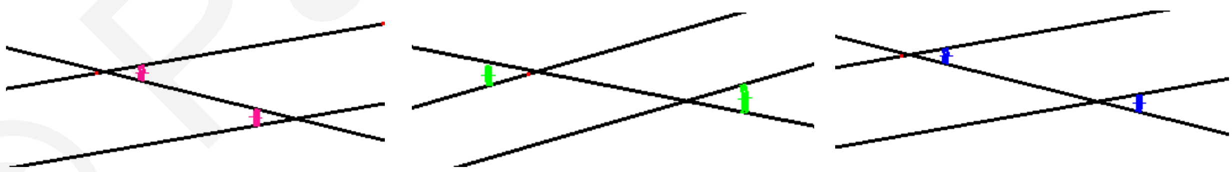
Un angle aigu, un angle obtus, un angle plat, un angle droit.



Deux angles adjacents complémentaires, deux angles adjacents supplémentaires, des angles opposés par le sommet

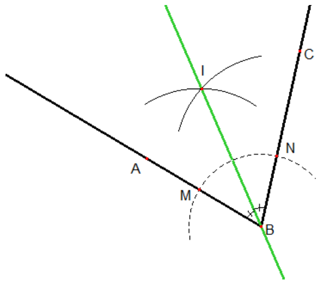


Deux droites parallèles définissent de part et d'autre d'une sécante des angles alternes-internes de même mesure (*en rouge*), des angles alternes-externes de même mesure (*en vert*) et du même côté de la sécante des angles correspondants **(***en bleu***)** de même mesure.



**6.** A *la règle et au compas* :

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ partage l'angle en deux angles adjacents (de part et d'autre de la bissectrice) de même mesure. C'est l'axe de symétrie de l'angle.



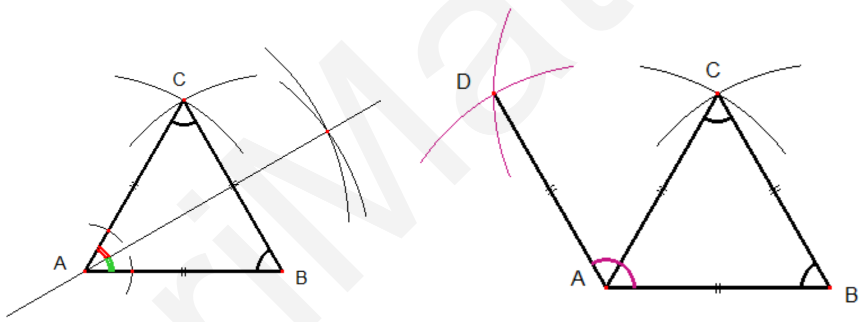

**Programme de construction au compas de** **la bissectrice d'un angle $\widehat{ABC}$ :**

- Tracer un arc de cercle de centre B de rayon quelconque.
- Cet arc coupe les deux côtés de l'angle respectivement en deux points M et N.
- Tracer un arc de cercle de centre M et un arc de cercle de centre N de même rayon.
- Ces deux arcs se coupent en I. La droite (BI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$

*En effet les points B et I sont équidistants de M et de N. La droite (BI) est donc la médiatrice du segment [MN], et l'axe de symétrie du triangle isocèle BMN donc aussi de l'angle $\widehat{ABC}$*

· Pour construire au compas un angle de 90°, il suffit de tracer deux droites perpendiculaires (voir 2.), puis la bissectrice de l'angle obtenu pour obtenir un angle de 45°.

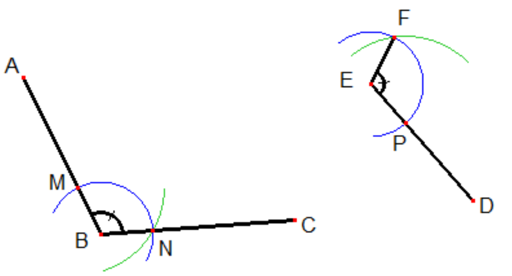
· Pour construire au compas un angle de 60°, il suffit de tracer un triangle équilatéral (les trois angles mesurent 60°), puis la bissectrice de l'angle obtenu pour obtenir un angle de 30°.




· L'angle de 120° s'obtient en construisant deux angles adjacents de 60°.

**7.** Report d'angle à *la règle et au compas :*

$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ : Veiller à bien observer les sommets des angles, ici B et E.



**Programme de construction d'un report d'angle au compas :**

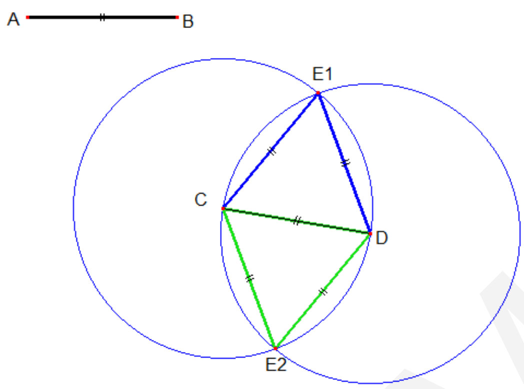
- Tracer un arc de cercle de centre B de rayon quelconque, il coupe les deux côtés de l'angle $\widehat{ABC}$ en deux points M et N.
- Tracer un arc de cercle de centre E de même rayon, il coupe le segment [ED] en un point P (éventuellement la demi-droite [ED).
- Tracer un arc de cercle de centre P de rayon MN.
- Les deux arcs se coupent en un point F. L'angle $\widehat{DEF}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{ABC}$.

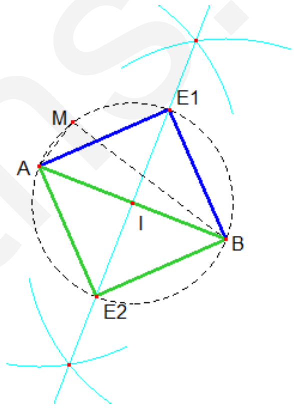
**8.** A *la règle et au compas :*

- Un triangle équilatéral CDE dont le côté [CD] a la même longueur que [AB].

Placer le point C, puis tracer un cercle de centre C de rayon AB. Placer un point D sur ce cercle.

Tracer un cercle de centre D de rayon CD. Il coupe le premier cercle en deux points E1 et E2, donnant deux possibilités de triangles équilatéraux.




- Un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [AB]. Trouver toutes les possibilités.

**Programme de construction d'un triangle rectangle connaissant son hypoténuse** :

- Soit un segment [AB] représentant l'hypoténuse
- Tracer la médiatrice* de [AB]. Elle coupe le segment en son milieu I.
- Tracer un cercle de centre I de rayon IA.
- Tous les points situés sur ce cercle forment avec A et B un triangle rectangle (en exemple le triangle AMB). Les deux points du cercle situés sur la médiatrice forment avec A et B deux triangles rectangles isocèles.

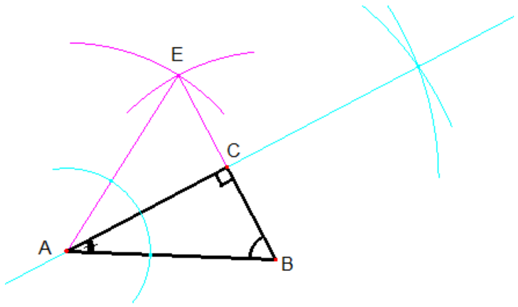
*En effet, si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et a ce diamètre pour hypoténuse.*

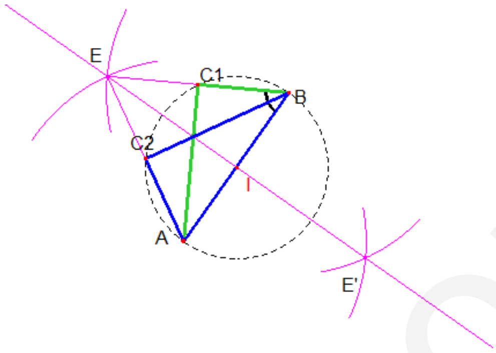
** Le sous programme de la construction de la médiatrice est écrit à la question 2.*

- Un triangle ABC tel que $\hat{A}=30°$ et $\hat{B}=60°$ : on peut remarquer que le troisième angle mesure 90°. En effet *la somme des angles d'un triangle vaut 180°.* Le triangle ABC est donc un triangle rectangle en C.
- On peut tracer un triangle ABE équilatéral de côté [AB], l'angle $\widehat{ABE}$ mesure 60°, ainsi que l'angle $\widehat{BAE}$.

La bissectrice de $\widehat{BAE}$ coupe [BE] en C. Le triangle ABC vérifie bien les conditions données.

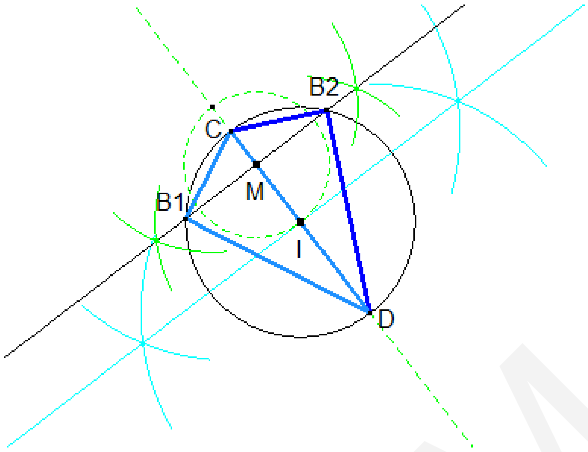
· On peut aussi construire deux triangles équilatéraux ABE et ABE’ qui permettent en même temps de tracer la médiatrice de [AB] afin de déterminer le milieu I du segment. Le point C cherché est sur le cercle de diamètre [AB] puisque le triangle est rectangle en C. D’où quatre possibilités (deux avec E et deux avec E’).




**9.** *A la règle et au compas :*

Le triangle BCD est rectangle en B, sachant que M est le pied de la hauteur issue de B.




Comme le triangle BCD est rectangle en B, le point B appartient au demi-cercle (cercle) de diamètre [CD]. Il faut pour le tracer, construire la médiatrice de [CD] qui coupe [CD] en son milieu I.

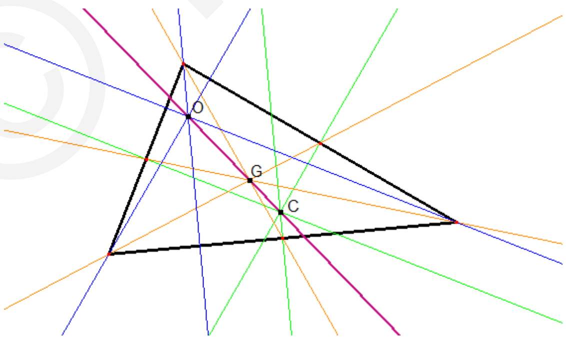
Le point I est le centre du cercle.

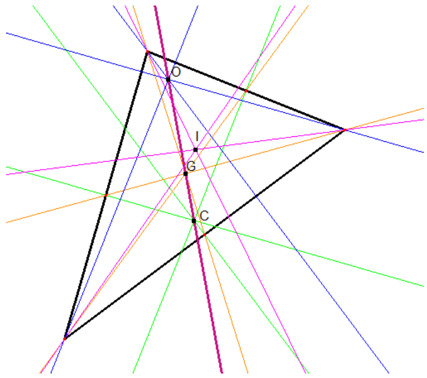
Comme M est le pied de la hauteur issue de B, le point B appartient à la droite *d* perpendiculaire en M au segment [CD] (voir ex.3)

Le cercle coupe la droite *d* en deux points $B_1$ et $B_2$ qui déterminent deux triangles $B_1CD$ et B2CD.

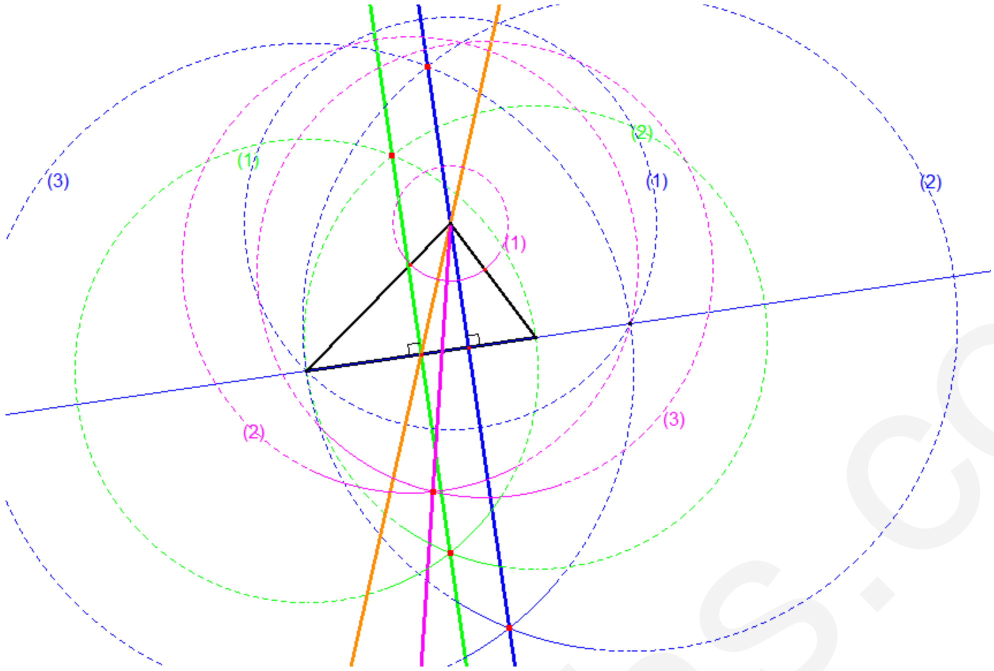
**10.** Soit un triangle ABC. L’orthocentre O est le point de rencontre des trois hauteurs (en bleu). Le centre de gravité G est le point de rencontre des trois médianes (en orange). Le centre du cercle circonscrit C est le point d’intersection des trois médiatrices (en vert). Ces trois points remarquables sont alignés sur la droite d’Euler.

Le cercle du centre inscrit est le point d’intersection des trois bissectrices (en rose). Il n’est pas sur cette droite particulière.



**Détails de construction au compas** d'une médiatrice (vert), d'une hauteur (bleu), d'une médiane (orange), d'une bissectrice issu d'un même sommet.




**Premières propriétés**

**11.** La médiatrice d'un segment [AB] partage le plan en deux demi-plans $P_A$ et $P_B$. La médiatrice de [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B. Le demi-plan $P_A$ est l'ensemble des points M plus proches de l'extrémité A du segment c'est-à-dire tel que MA<MB.

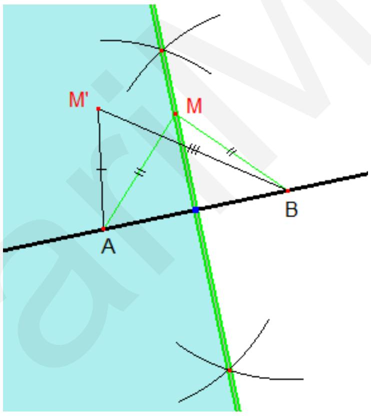
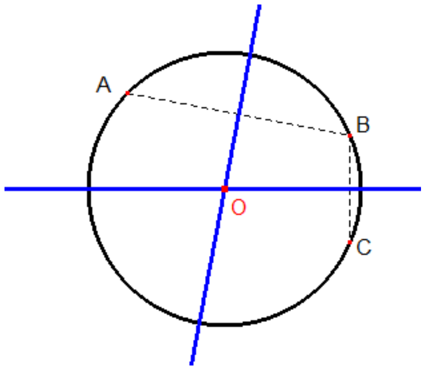
fig. 11 


fig.12 

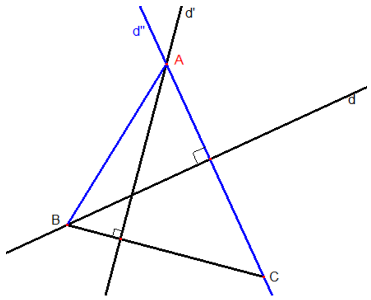

**12. Programme de construction du centre d'un cercle « effacé ».** *figure ci-dessus.*

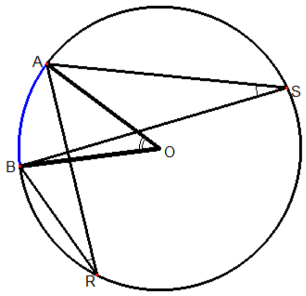
- Placer trois points A, B, C sur le cercle.
- Tracer la médiatrice du segment [AB] et celle du segment [BC] (*voir construction au compas*)
- Ces deux médiatrices se coupent en un point O équidistant de A, de B, et de C.

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

**13.** (*d'*) la hauteur issue de A du triangle ABC. Le point A est donc sur la droite (d').

(*d*) est la hauteur issue de B. Elle est donc perpendiculaire au côté [AC]. Le point A est donc sur la droite (d''), perpendiculaire à (d) passant par C. Le point A est donc à l'intersection de ces deux droites. *On peut* *préciser que les deux droites (d') et (d'') ne sont pas parallèles car sinon la droite (d) perpendiculaire à (d'') serait aussi perpendiculaire à (d') ce qui est impossible car (d) et [BC] ne sont pas confondus.*



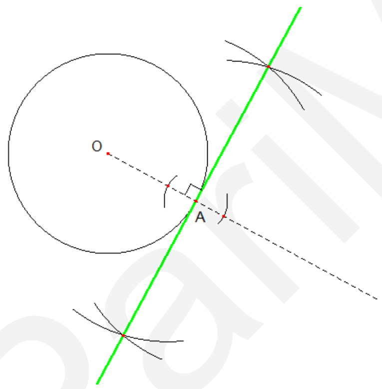



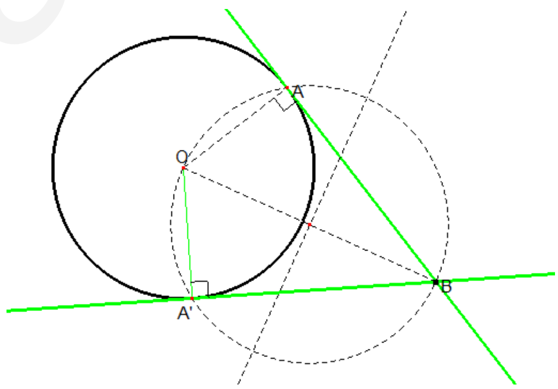

**14.** D'une part, tous les angles inscrits interceptant un même arc ont la même mesure, d'autre part, un angle au centre a pour mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc (*figure ci-dessus*)

Donc $\widehat{ASB} = \widehat{ARB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ .

**15.** Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et a ce diamètre pour hypoténuse. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [AB], il est donc rectangle en C. L'angle $\widehat{ACB}$ mesure donc 90°. La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Puisque l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 50°, l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 180°-(90°+50°)=40°.

**16.** La tangente à un cercle (*C)* passant par un point A situé sur le cercle, est perpendiculaire au rayon [OA]. Il suffit donc de tracer la droite perpendiculaire à [OA] au point A. *Au compas, on prolongera le segment en traçant la demi-droite [OA)…*




**17.** Plus généralement, la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle en son point de contact. Mais dans le cas du point B extérieur au cercle, on ne connaît pas ce point de contact A. Il faut donc le construire. On sait que le triangle OAB sera rectangle en A. Le point A est donc sur le cercle de diamètre [OB] …

**Programme de construction de la tangente à un cercle passant par un point B extérieur au cercle :**

- Tracer le segment [OB]
- Tracer la médiatrice de [OB] qui définit le milieu de [OB].
- Tracer le cercle de diamètre [OB].

Les deux cercles se coupent en deux points A et A' tels que les triangles OAB et OA'B sont rectangles.

La droite (AB) est donc perpendiculaire au rayon [OA], la droite (A'B) est donc perpendiculaire au rayon [OA']. Ce sont les deux tangentes au cercle (C) passant par B.

**18.** Si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans un cercle ayant comme diamètre son hypoténuse. On sait que les deux triangles ABC et BCD sont rectangles respectivement en A et en D. Ils sont donc inscrits dans le cercle de diamètre [BC], [BC] étant leur hypoténuse. Les points A, B, C, D sont tous sur ce cercle. Pour construire un troisième triangle BEC, rectangle en E, il suffit de placer un point E sur ce cercle car d'après la réciproque de la propriété précédente, si un triangle est inscrit dans un demi-cercle ayant pour diamètre un de ses côtés alors il est rectangle.

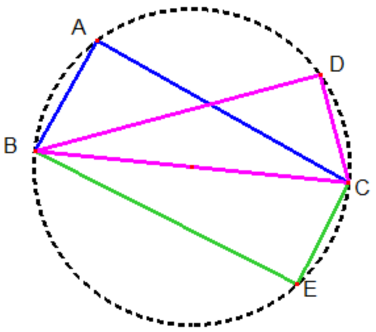


fig18

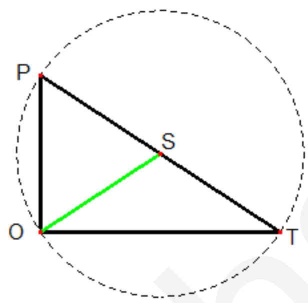


fig19

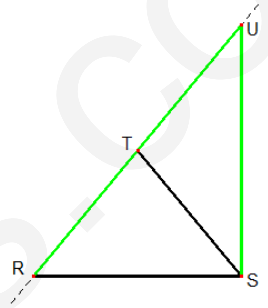


fig20

**19.** Le triangle POT est un triangle rectangle en O. [TP] est l'hypoténuse de ce triangle rectangle. Le point S est le milieu du segment [TP], [OS] est donc la médiane issue de O. Si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse. $TP = 8cm$. Le segment [OS] mesure donc 4cm.

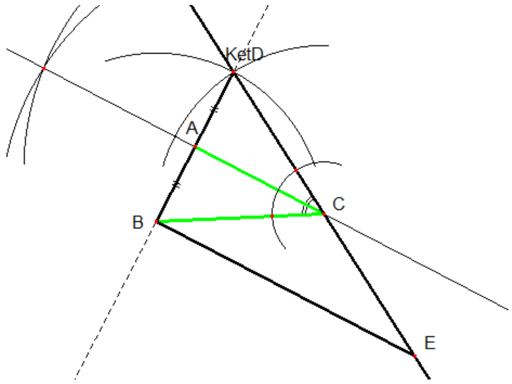
**20.** Puisque le triangle RST est isocèle en T, on a $RT = ST$. Puisque U est le symétrique du point R par rapport au point T, on a $RT = TU$. On en déduit que $RT = TU = ST$. Dans le triangle RSU, T est le milieu de [RU] et [ST] est la médiane. Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle au point opposé à ce côté. Le triangle RSU est donc rectangle en S, d'hypoténuse [RU].

## Pour s'exercer[2]

### Exercice 1

**1.** L'angle $\widehat{ABC}$ mesurant 60°, on peut considérer qu'il est un des angles d'un triangle équilatéral de base [BC]. Soit BCK ce triangle. La bissectrice de l'angle $\widehat{BCK}$ partage cet angle en deux angles de 30° et coupe le côté [BK] au point A.

[2] Lyon 97- Orléans 2003 - Besançon 2003 - Gpe1.2008




$BC = 6\ cm$, $\widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{ACB} = 30°$

**2.** Si D est le symétrique de B par rapport à A, les points B, A, D sont alignés et A est le milieu de [BD]. Dans le triangle équilatéral BCK précédemment tracé, la droite (AC) est la bissectrice issue de C. Elle est donc aussi la médiatrice de [BK] et A est le milieu de [BK]. On en déduit que les points K et D sont confondus et la droite (AC) est bien la médiatrice du segment [BD].

**3.** Le triangle BCD est donc équilatéral.

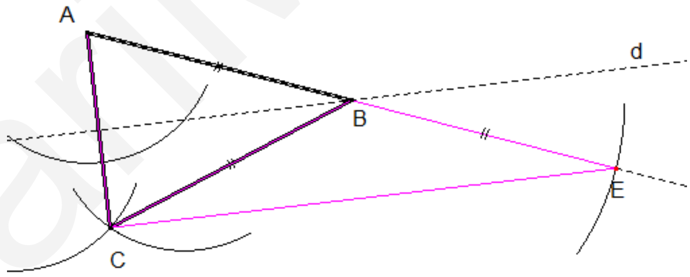
**4.** E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de [DE] et $DC = CE$. Or $DC = BC$. On en déduit que $BC = CE$ et que le triangle BCE est isocèle.

Les points D, C, E étant alignés, $\widehat{BCE} = \widehat{DCE} - \widehat{BCD} = 180° - 60° = 120°$ et $\widehat{CBE} = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$

On en déduit que $\widehat{DBE} = \widehat{DBC} + \widehat{BCE} = 60° + 30° = 90°$. Le triangle DBE est donc rectangle en B.

**Exercice 2**

**1.** Si la droite ($d$) est l'axe de symétrie du triangle ABC, alors le point C est le symétrique de A par rapport à ($d$) ce qui signifie aussi que ($d$) est la médiatrice de [AC].




Plusieurs constructions sont possibles, en voici une :

- Tracer un arc de cercle de centre A de rayon $r$ qui coupe la droite ($d$) en deux points $b_1$ et $b_2$.
- Tracer successivement deux arcs de cercle de centre $b_1$ et $b_2$, de rayon $r$ tels que ces deux arcs se coupent point C. Ce point C est le symétrique de A par rapport à ($d$).

En effet $b_1$ est à égale distance de A et C, et $b_2$ est à égale distance de A et C. Ces deux points sont donc sur la médiatrice de [AC]. Comme $b_1$ et $b_2$ sont sur ($d$), ($d$) est bien la médiatrice de [AC].

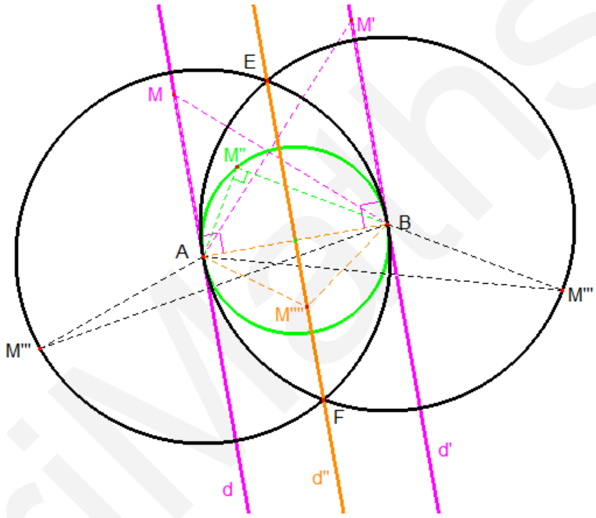
**2.** Pour construite le point E symétrique de A par rapport à B, on trace la demi-droite [AB), puis à l'aide du compas, on reporte la longueur AB de l'autre côté de B. On obtient le point E.

**3.** Puisque le point E est symétrique du point A par rapport au point B, alors $BE = BA$. Or on a vu que $BC = BA$. On en déduit que $BE = BC = BA$. Les points E, C et A sont donc situés sur un cercle de centre B et de rayon BC. [AE] est un diamètre de ce cercle. Donc le triangle ACE est rectangle en C.
*On peut aussi utiliser la propriété de la médiane : dans le triangle ACE, le segment [BC] est la médiane issue de C et sa longueur est la moitié de celle du segment [AE]. On en déduit que le triangle ACE est un triangle rectangle en C.*

**4.** On vient de voir que $BE = BC = BA$ donc en particulier $BE = BC$. Le triangle BCE est donc isocèle de sommet B.

**Exercice 3**

Pour déterminer un ensemble E de points vérifiant une propriété P, il faut d'une part trouver des points vérifiant la propriété, alors ils font partie de E (condition nécessaire), d'autre part vérifier que tous les points de E vérifient la propriété (condition suffisante). Cet ensemble est aussi appelé « lieu des points ».




**a.** ABM est un triangle rectangle en A (*ou en B*), si et seulement si les droites (AB) et (AM) (*ou (BM))* sont perpendiculaires :

- Si ABM est un triangle rectangle en A (*ou en B*), alors le point M appartient à la droite *d* perpendiculaire en A à [AB] (*ou à la droite d' perpendiculaire en B à [AB]).*
- Réciproquement si un point M appartient à la droite *d* (*ou d'*), alors le triangle ABM est rectangle en A (*ou B*).

On peut donc conclure que l'ensemble des points cherchés est l'ensemble constitué par les deux droites *d* et *d'* (*en rose*).

**b.** ABM est un triangle rectangle en M si et seulement si M est sur le cercle de diamètre [AB]. L'ensemble des points M cherché est donc le cercle de diamètre [AB] (*en vert)*.

**c.** ABM est un triangle isocèle en A (*ou en B*) si et seulement si $AB = AM$ (*ou* $AB = BM$) c'est-à-dire si et seulement si M est sur le cercle de centre A (*ou B*) et de rayon AB. L'ensemble cherché est donc formé de ces deux cercles (*en noir)*.

*Les deux points E et F qui appartiennent à ces deux cercles donnent deux triangles ABE et ABF à la fois isocèles en A et en B, donc équilatéraux.*

***d.*** ABM est un triangle isocèle en M si et seulement si $AM = BM$ c'est-à-dire si et seulement si le point M est équidistant des points A et B, c'est-à-dire si le point M est sur la médiatrice du segment [AB].
L'ensemble cherché est donc la médiatrice *d''* du segment [AB] (*en orange)*.

**Exercice 4**

La reproduction du plan ne pose pas de difficultés particulières, étant donné que tous les instruments sont disponibles. A l'échelle 1/10000, 1cm sur le dessin représente 100m en réalité. *Pour placer les points E et B, on place E sur une perpendiculaire d à (L), à 5cm de (L), puis on trace la perpendiculaire à d passant par E. On place B à 6cm de B sur d. Le point S est à l'intersection du cercle de centre B passant par E (triangle EBS isocèle), et du cercle de centre E de rayon 10cm. Le point P est le milieu de [ES].*

1. Soient $D$ et $D'$ les deux droites parallèles à la ligne à haute tension L situées à une distance de 500m.
Le trésor est en dehors de la zone comprise entre les droites parallèles D et D' ; la zone rouge est donc une zone interdite.
2. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre E et de rayon 800m. Le trésor est à l'extérieur de ce cercle. Le disque orange est donc une zone interdite.
3. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre B et de rayon 300m. Le trésor est à l'intérieur de ce cercle. Le disque vert est donc une zone possible.
4. Soit $d$ la médiatrice du segment ayant pour extrémités S et P. Le trésor est sur cette médiatrice. Il faut donc choisir la partie de la médiatrice située dans la zone verte, en dehors des zones rouge et orange.
5. La figure ci-dessous est à une échelle réduite. La zone cherchée est le segment en trait épais noir sur la figure, dans la zone verte.