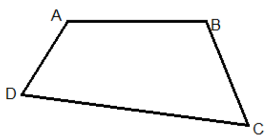
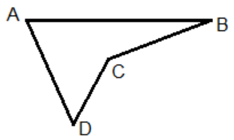
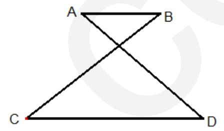
S12C. Autour des POLYGONES Corrigé
Quadrilatères, polygones réguliers convexes

Mise en route

1. Parmi ces polygones, un seul est convexe : c'est le triangle. La plupart du temps, les polygones étudiés sont convexes (pas d'angle rentrant, c'est-à-dire pas d'angle dont la mesure est supérieure à 180°) et non croisés. Ci-dessous, le polygone de gauche est convexe, les deux autres ne le sont pas, celui de droite est un quadrilatère croisé. [AB] et [BC] sont, dans tous les cas, deux côtés consécutifs, [AB] et [CD] deux côtés opposés, [AC] et [BD] deux diagonales (elles joignent deux sommets opposés).

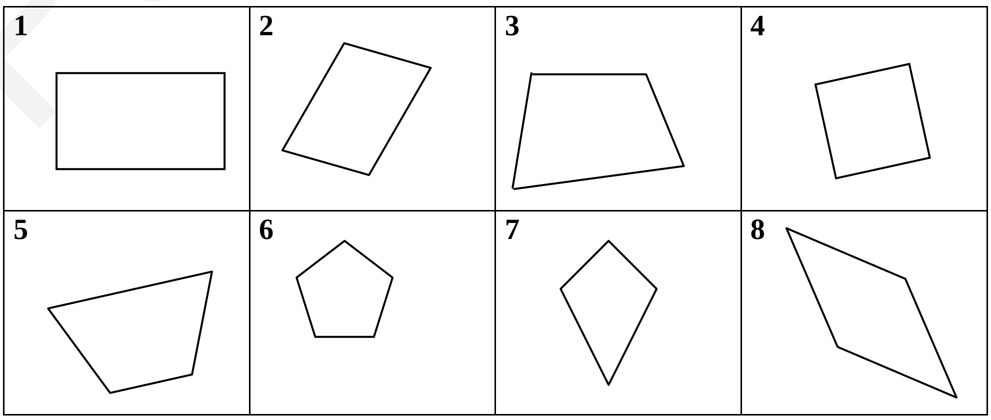






2. Un quadrilatère est un polygone qui a 4 côtés. Seule la figure 6 n'est pas un quadrilatère, c'est un pentagone (5 côtés). Ces figures permettent seulement de conjecturer certaines propriétés, c'est-à-dire que ces quadrilatères « semblent » avoir certaines caractéristiques. Ainsi :

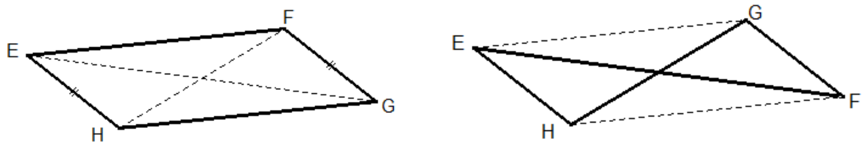
- La figure 4 semble être un carré (4 côtés de même longueur et 4 angles droits).
- Les figures 4 et le 8 semblent être des losanges (un losange a ses 4 côtés de même longueur, donc un carré est un losange particulier)
- La figure 5 possède deux côtés opposés parallèles seulement, c'est un trapèze.
- Un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux (opposés parallèles) est un parallélogramme : les figures 1, 2, 4, 8 semblent donc être des parallélogrammes, la figure 2 un parallélogramme « quelconque ».
- La figure 1est un parallélogramme particulier, c'est un rectangle.
- La figure 7 est appelé « cerf volant », il n'a que deux côtés égaux et un axe de symétrie.



3. Vrai ou faux? On suppose le quadrilatère convexe.

- Un quadrilatère qui a deux côtés parallèles est un parallélogramme : FAUX, c'est un trapèze.
- Un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme : VRAI.

Si l'on ne sait pas que ce quadrilatère est convexe, on peut constater que c'est faux.

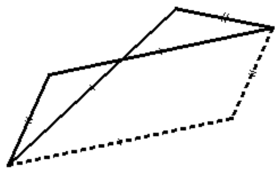


- Un quadrilatère convexe qui a quatre côtés de même longueur est un carré : FAUX, c'est un losange.
- Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange : FAUX, c'est un cerf volant.
- Un quadrilatère convexe dont les diagonales ont même longueur est un rectangle : FAUX, il faut en plus que ce soit un parallélogramme.
- Un quadrilatère convexe dont les diagonales ont même milieu est un parallélogramme : VRAI.
- Un quadrilatère convexe dont les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires est un carré : FAUX, c'est un losange.

4. Qui suis-je ? Trouver l'intrus.

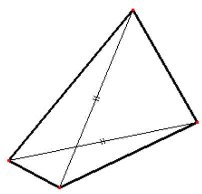
- Un quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont de même longueur : un parallélogramme

  On peut remarquer que s''il n'est pas convexe……



- Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles : un parallélogramme
- Un quadrilatère dont les côtés consécutifs sont perpendiculaires : un rectangle
- Un quadrilatère dont les diagonales sont axes de symétrie : un losange
- Un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu : un parallélogramme
- Un quadrilatère dont les diagonales sont de longueurs égales : quadrilatère quelconque

  Si elles se coupent en leur milieu,
  c'est un rectangle, sinon ……

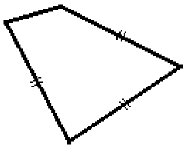
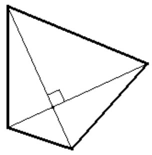
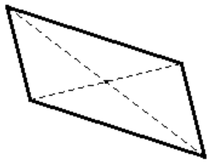
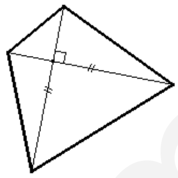


Ce dernier quadrilatère est donc l'intrus car ce n'est pas un parallélogramme.

5. Vrai ou Faux ?

Si le quadrilatère a ……………………………….………… alors c’est un losange

ci- dessous les contre exemples des cas FAUX

fig. a  fig. c  fig. d  fig. e 

a. trois côtés de même longueur : FAUX.

b. ses côtés consécutifs de même longueur : VRAI, c’est un losange.

c. ses diagonales perpendiculaires : FAUX.

d. ses diagonales de même milieu : FAUX, c’est seulement un parallélogramme.

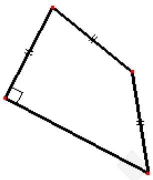
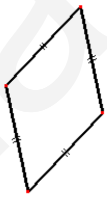
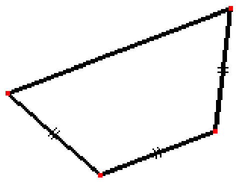
e. ses diagonales perpendiculaires et de même longueur : FAUX, il faut en plus que ce soit un parallélogramme, donc que les diagonales aient le même milieu.

f. ses diagonales de même milieu et perpendiculaires : VRAI, c’est un losange.

6. Vrai ou Faux ?

On sait que ce quadrilatère a trois côtés de même longueur…

Une figure contre exemple justifie les réponses fausses

fig. a  fig. c  fig. d 

a. Il suffit qu’il ait un angle droit pour que ce soit un carré : FAUX.

b. Il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu pour que ce soit un losange : VRAI.

Si les diagonales se coupent en leur milieu, c’est un parallélogramme. Si de plus deux côtés consécutifs sont de même longueur, c’est un losange.

c. Il suffit que le quatrième côté soit de même longueur pour que ce soit un carré : FAUX.

Un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur est un losange.

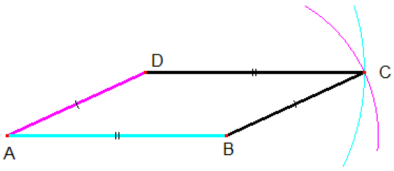
d. Il suffit que deux côtés soient parallèles pour que ce soit un losange : FAUX.

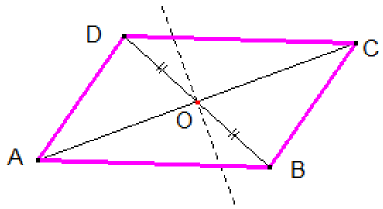
Ce quadrilatère peut être un trapèze isocèle.

7. Constructions

Chaque méthode de construction s’appuie sur une propriété citée en italique

a. Programmes de construction du parallélogramme





Méthode 1

Si un quadrilatère a ses côtés opposés égaux deux à deux, alors c'est un parallélogramme

- Tracer un arc de cercle de centre B de rayon AD
- Tracer un arc de cercle de centre D de rayon AB
- Ces deux arcs se coupent au point C. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Méthode 2

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

- Tracer le segment [AC].
- Construire *au compas* la médiatrice du segment [AC], qui permet de déterminer le milieu O de [AC].
- Tracer la droite (OB).
- Placer le point D sur (OB) tel que OB = OD (*report au compas*). Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

b. **Indication de construction** : [AB] et [CD] représentent les bases du trapèze. Comme il est isocèle, il possède un axe de symétrie qui est la médiatrice commune aux deux bases. Tracer un segment [AB] mesurant 4cm et sa médiatrice *d*. Placer un point I sur *(d)* et tracer la perpendiculaire à *d* passant par I. Cette droite *d'* est parallèle à [AB]. Tracer un cercle de centre I, de rayon 1,5cm. Il coupe *d'*en deux points C et D. ABDC est un trapèze isocèle.

fig. 2

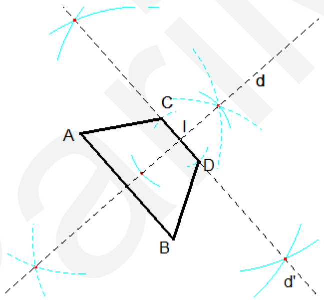
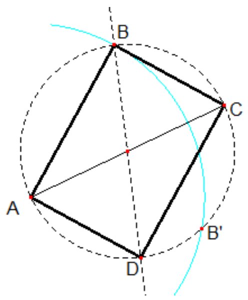


fig.3



c. **Indication de construction** : [AC] représente la diagonale du rectangle ABCD, [AB] son côté. Le triangle ABC étant rectangle en B, il est inscrit dans le cercle C_1 de diamètre [AC].Tracer le segment [AC] de 5cm de longueur, puis le cercle C_1 dont on déterminera le centre O avec la règle graduée puisqu'elle est disponible. Tracer un arc de cercle C_2 de centre A de rayon 4cm. Il coupe le cercle C_1 en deux points B et B'. Tracer la demi-droite [BO) ; elle coupe le cercle C_2 en D. ABCD est un rectangle.

d. Indication de construction : Pour construire un quadrilatère ayant des diagonales perpendiculaires et qui ne soit pas un losange, il suffit de tracer deux segments perpendiculaires qui ne se coupent pas en leur milieu.

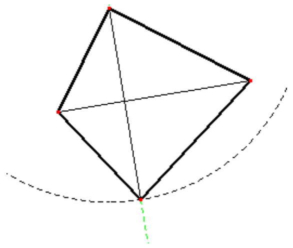


fig4.

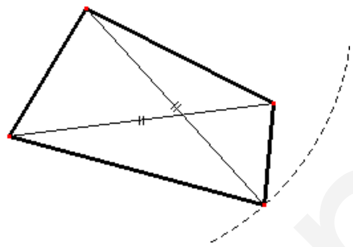


fig.5

e. Indication de construction Pour construire un quadrilatère ayant des diagonales de même longueur et qui ne soit pas un rectangle, il suffit de tracer deux segments de même longueur qui ne se coupent pas en leur milieu.

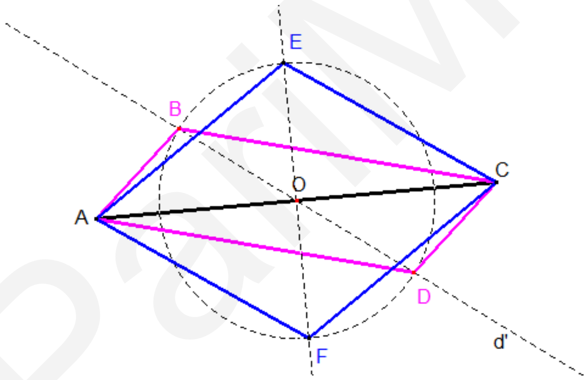
f. Programme de construction des parallélogrammes ABCD connaissant une diagonale [AC]

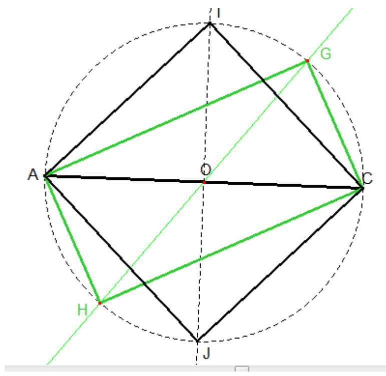
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

- Tracer un segment [AC] mesurant 5cm.
- Déterminer le milieu O de [AC]. Tracer un cercle C_1 de centre O de rayon différent de 2,5cm.
- Tracer une droite *d'* passant par O, distincte de (AC). Elle coupe le cercle C_1 en deux points qui sont les deux autres sommets B et D du parallélogramme (*en rose*).

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

Il faut donc placer les points E et F sur *d*, médiatrice de [AC] et sur le cercle C_1 (*en bleu*).





Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

Il faut placer les points G et H diamétralement opposés sur le cercle C_2 de centre O passant par A et C.

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.

Il faut donc placer les points I et J sur *d*, médiatrice de [AC] et sur le cercle C_2.

g. Programme de construction d'un carré ayant pour côté une longueur AB donnée :

Si un quadrilatère a ses côtés perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.

- Tracer un segment [AB] côté du carré
- Tracer deux droites *d* et *d'* perpendiculaires à [AB] respectivement en A et en B.

· Tracer un arc de cercle de centre A de rayon AB. Il coupe la droite *d* en deux points ; l'un est M.

· Tracer un arc de cercle de centre B de rayon AB. Il coupe la droite *d'* en deux points. On appelle N celui qui est dans le même demi plan que M par rapport à la droite (AB).

Le quadrilatère AMNB est un carré.

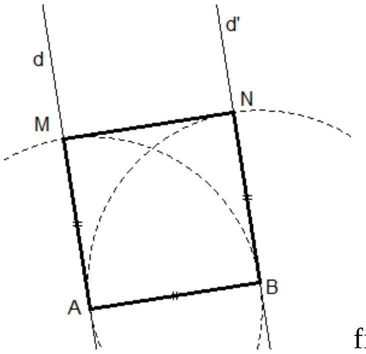


fig.7

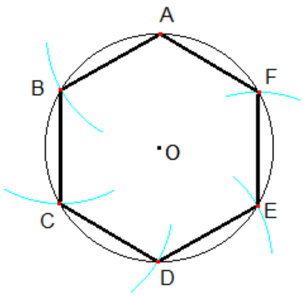


fig.8

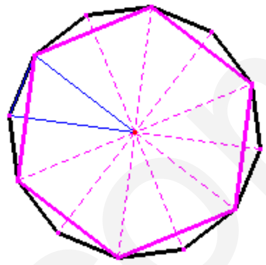


fig.9

h. Programme de construction d'un hexagone régulier de côté une longueur AB donnée.

· Tracer un cercle de rayon *r*, de centre O. Placer un point A sur le cercle.

· Tracer un arc de cercle de centre A de rayon *r*. Soit B un de deux points d'intersection avec le cercle.

· Tracer un arc de cercle de centre B de rayon *r*. Cet arc coupe le cercle en A et en un autre point qu'on appelle C.

· Tracer un arc de cercle de centre C de rayon r. Soit D le nouveau point d'intersection avec le cercle.

· Tracer un arc de cercle de centre D de rayon r. Soit E le nouveau point d'intersection avec le cercle.

· Tracer un arc de cercle de centre E de rayon r. Soit F le nouveau point d'intersection avec le cercle.

Le quadrilatère ABCDEF est un hexagone régulier. Il a 6 côtés de même longueur. Il est inscrit dans un cercle ayant pour rayon la longueur de son côté.

Indication de construction : Pour tracer un dodécagone régulier (12 côtés), on peut construire un hexagone inscrit dans un cercle, puis tracer les médiatrices de chaque côté. Chaque médiatrice coupe le cercle en un point qui sera un nouveau sommet du dodécagone.

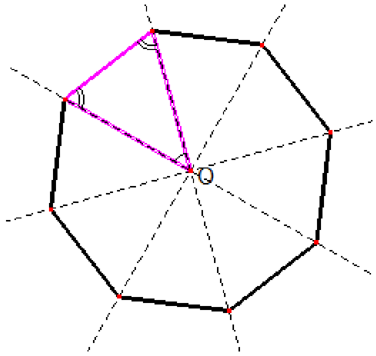
Un polygone régulier est un polygone inscriptible dans un cercle et dont les côtés ont tous même longueur. Les rayons qui joignent le centre du cercle aux sommets découpent le polygone régulier en triangles isocèles isométriques.

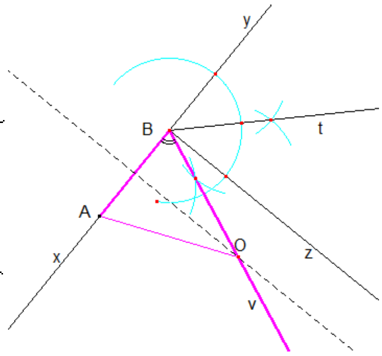
Si la longueur du côté [AB] est donnée, on remarque que chaque triangle de sommet O, centre du polygone, et de base AB est isocèle, l'angle au sommet mesure 30°, les angles à la base 75°. On peut alors construire à part un angle de 75° (au compas 60°+15°), puis le reporter sur le sommet A du côté [AB] et sur le sommet B du côté [AB]. On obtient alors le centre du cercle….

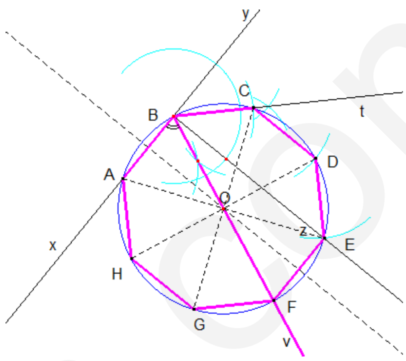
i. Programme de construction d'un octogone régulier de côté une longueur AB donnée.

Pour tracer un octogone régulier *sans dimension donnée*, il suffit de tracer deux droites perpendiculaires *d* et *d'*, sécantes en O, puis de tracer les bissectrices des quatre angles droits obtenus. Ces huit demi-droites coupent un cercle de centre O en huit points qui sont les sommets d'un octogone régulier.

· *Si le côté est donné,* il faut étudier la figure finie pour pouvoir le construire. Chaque triangle de type OAB est isocèle, l'angle au sommet mesure 45° (360° : 8) et les angles à la base mesurent la moitié de 135° (180°- 45°). On va donc commencer la construction de l'octogone par celle d'un angle de 135° en traçant un angle plat, sa bissectrice [Bz), puis la bissectrice [B t) de l'angle droit $\widehat{yBz}$. Elle partage donc cet angle en deux angles de 45° et l'angle $\widehat{xBt}$ mesure 135°. En traçant la bissectrice [Bv) de cet angle, on obtient l'angle $\widehat{xBv}$ qui est l'angle à la base du triangle OAB.



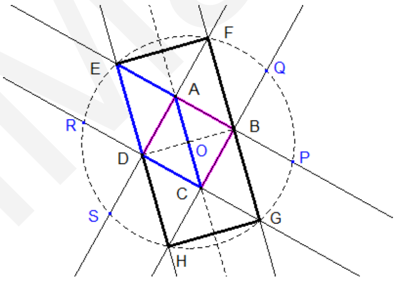




Sur la demi-droite *[Bx)*, placer le point A tel que le segment [AB] ait la longueur donnée. La médiatrice de [AB] coupe [Bv) au point O tel que OAB soit un triangle isocèle de base [AB]. O est le centre du cercle circonscrit à l'octogone ABCDEFG. On obtient les autres sommets en reportant la longueur AB sur le cercle.

Pour s'exercer

Exercice 1[1]



1. Les points F, B, G sont alignés, ainsi que les points E, D, H. Les droites (AC) et (FG) sont donc parallèles ainsi que les droites (AC) et (EH). On en déduit que (EH) et (FG) sont parallèles car deux parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

Plus particulièrement [ED] et [AC] sont parallèles, *de même que [DH] et [AC], [FB] et [AC], [BG] et [AC].*

D'autre part, ABCD étant un carré, les droites (AB) et (CD) sont parallèles ainsi que (AD) et (BC). Les points E, A, B étant alignés sur (AB), on en déduit que [AE] et [CD] sont parallèles.

De même les points D, C, G étant alignés, on en déduit que [AB] et [CG] sont parallèles ; les points D, A, F étant alignés, on en déduit que [AF] et [BC] sont parallèles ; les points B, C, H étant alignés, on en déduit que [CH] et [AD] sont parallèles.

[1] 1. D'après Amiens 2001 ; 2. G1 2006 ; 3. Orléans 99 ; 4. Aix-Marseille 1997 ; 5. Créteil 99

Le quadrilatère AEDC a donc ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme. On en déduit que ses côtés opposés sont de même longueur, soit $ED = AC$ et $EA = DC$.

On montre de même que le quadrilatère DACH est un parallélogramme et que $DH = AC$ et $DA = CH$.

On en déduit que $ED = AC = DH$. D est ainsi le milieu de [EH] et $EH = 2AC$.

De la même façon on peut démontrer que AFBC et ABGC sont des parallélogrammes et conclure que $FB = AC = BG$ *, donc B est le milieu de [FG] et* $FG = 2AC$.

En conclusion $FG = EH$. Comme (FG) est parallèle à (EH), le quadrilatère EFGH a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

Puisque $ED = FB$, le quadrilatère EFBD a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ; c'est donc un parallélogramme. De plus si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Dans le carré ABCD les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires ; or [AC] est parallèle à [ED], donc [ED] et [DB] sont perpendiculaires. Le parallélogramme EFBD a un angle droit, c'est donc un rectangle, et on en déduit que l'angle $\widehat{DEF}$ est droit.

Le parallélogramme EFGH a un angle droit, c'est donc un rectangle.

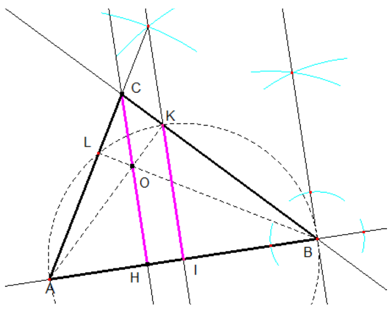
2. O étant le point d'intersection des diagonales du carré ABCD, O est le milieu de [BD] et de [AC].

La droite (BD) passe par le milieu D de [EH] et par le milieu B de [FG]. (BD) est donc un des axes de symétrie du rectangle et (BD) est perpendiculaire aux côtés [FG] et [EH] du rectangle. La droite (BD) est donc la médiatrice de [FG] et [EH] et le point O est équidistant des extrémités des segments, d'où $OE = OH = OF = OG$. O est le centre du rectangle EFGH, et le centre de son cercle circonscrit.

3. P étant le symétrique de A par rapport à B, alors B est le milieu de [AP] et $BA = BP$. Or on a vu précédemment que $EA = AB$. On a donc $EA = AB = BP$ et les segments [EP] et [AB] ont même milieu. Leur médiatrice commune passe donc par O, équidistant de A et de B. O est donc aussi équidistant des extrémités du segment [EP] et OE=OP. Le point P est donc sur le cercle de centre O passant par E.

On peut démontrer de même que, Q étant le symétrique de C par rapport à B, alors B est le milieu de [CQ] et $QB = BC = CH$. O est alors équidistant de H et de Q et $OH = OQ$. R étant le symétrique de C par rapport à D, alors D est le milieu de [RC] et $RD = DC = CG$. O est alors équidistant de R et G et $OR = OG$. Enfin S étant le symétrique de A par rapport à D, D est le milieu de [AS] et $SD = DA = AF$. O est alors équidistant de S et de F et $OS = OF$. Les points P, Q, R et S sont donc sur le cercle circonscrit au quadrilatère EFGH.

Exercice 2



1. Par hypothèse, le point K appartient au cercle de diamètre [AB]. Donc le triangle ABK est rectangle en K, donc l'angle $\widehat{AKB}$ mesure 90°. Les angles $\widehat{ABK}$et $\widehat{ABC}$ sont égaux car K appartient à la droite (BC). Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, l'angle $\widehat{ABK}$ mesure 45°. Le triangle ABK est donc rectangle et isocèle et AK= BK. Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, il est sur la médiatrice du segment, donc le point K appartient à la médiatrice de [AB]. De plus, I milieu du segment [AB] appartient aussi à la médiatrice de ce segment. La droite (KI) est donc bien la médiatrice du segment [AB].

2. Nous avons démontré que le triangle ABK est rectangle en K, donc les droites (AK) et (BK) sont perpendiculaires. K étant un point du segment [BC], on en déduit que la droite (AK) est perpendiculaire à (BC), c'est-à-dire que (AK) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

Par hypothèse, le point L appartient au cercle de diamètre [AB], donc le triangle ALB est rectangle en L. On en déduit que les droites (BL) et (AL) sont perpendiculaires. L étant un point du segment [AC], (BL) et (AC) sont perpendiculaires, c'est-à-dire que (BL) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Le point d'intersection O des droites (AK) et (BL) est donc l'orthocentre du triangle ABC et appartient également à la troisième hauteur (HC) du triangle ABC. On peut donc en conclure que les points C, O, H sont alignés.

3. (IK) est la médiatrice de [AB], donc (AB) et (IK) sont perpendiculaires.

Par hypothèse, (CH) est également perpendiculaire à (AB). Donc (CH) et (IK) sont parallèles entre elles.

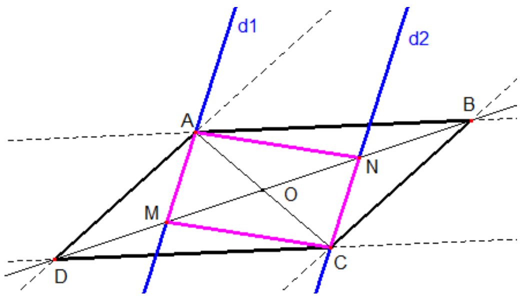
Le quadrilatère IKCH a deux côtés opposés parallèles, et deux côtés consécutifs perpendiculaires. C'est donc un trapèze rectangle.

4. Pour construire l'angle $\hat{A}$ de 60°, il suffit de construire un triangle équilatéral de base [AB]. Pour construire l'angle $\hat{B}$ de 45°, il suffit de construire un angle droit de sommet B puis d'en tracer la bissectrice.

Exercice 3

1. d_1 et d_2 sont parallèles, donc [AM] et [NC] le sont aussi.

ABCD étant un parallélogramme, O est centre de symétrie.



Dans la symétrie centrale de centre O, la droite symétrique de d_1 est la droite parallèle à d_1 passant par le symétrique de A par rapport à O, c'est-à-dire passant par C. C'est donc la droite d_2. Le point symétrique de M, intersection de d_1 et de (BD) est donc le point d'intersection de (BD) avec d_2 c'est-à-dire N.

Dans la symétrie centrale de centre O, les points A, B, M ont respectivement pour symétriques les points C, D, N. Les triangles ABM et CDN sont alors isométriques et $AM = NC$.

Le quadrilatère AMCN a deux côtés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

2. On veut que le parallélogramme AMCN soit un rectangle. Il faut donc que ses diagonales [MN] et [AC] soient de même longueur. Celles-ci se coupent en leur milieu O qui est aussi le milieu de [BD] car ABCD est un parallélogramme, et O est le milieu de [AC].

AMCN est donc un rectangle si et seulement si AC = MN, c'est à dire si OA = OM.

Dans ce cas, les points M et N sont sur le cercle de centre O de rayon OA.

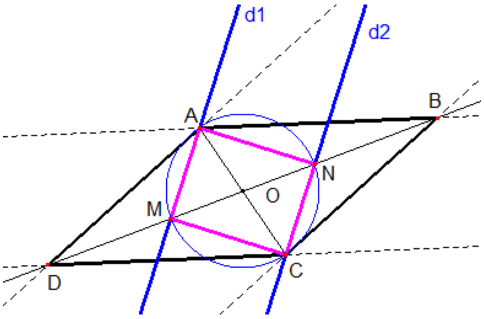


fig.2 : AC < BD

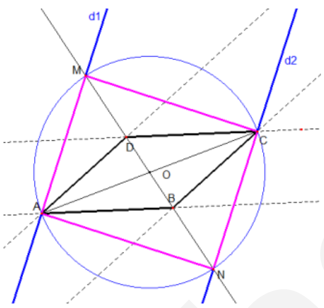


fig.2 : AC > BD.

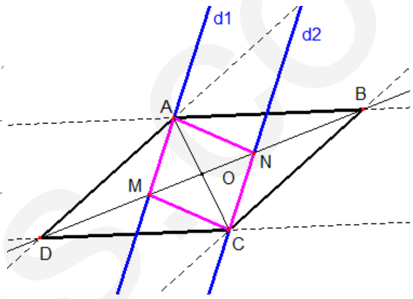
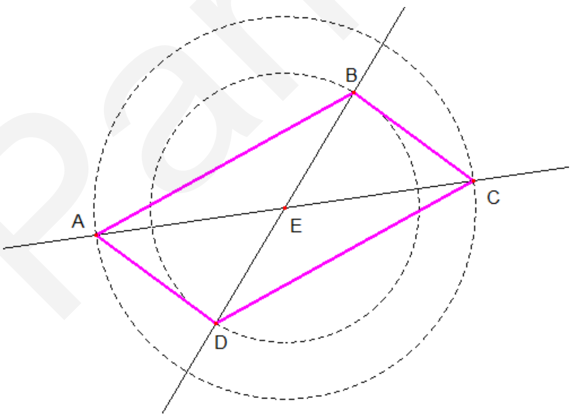


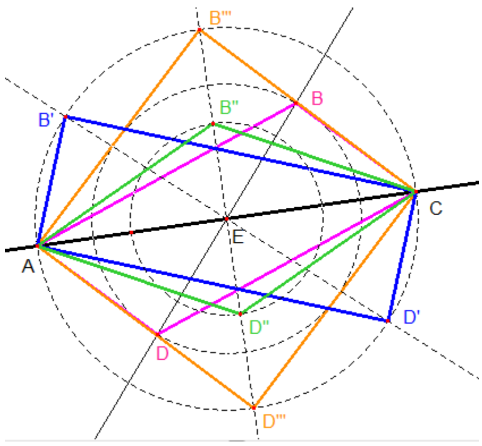
fig.3

3. Le parallélogramme AMCN est un losange si ses diagonales sont perpendiculaires, c'est-à-dire si (AC) est perpendiculaire à (MN), ou encore (AC) perpendiculaire à (BD). Dans ce cas ABCD est aussi un losange.

AMCN est donc un losange dès qu'ABCD l'est. On peut alors placer les droites d_1 et d_2 indifféremment.

Exercice 4





1.

· Placer deux points A et E. Tracer la droite (AE).

· Tracer le cercle C_1 de centre E, passant par A. Ce cercle coupe (AE) en C.

· Tracer un autre cercle de centre E (ne passant pas par A).

· Placer sur ce cercle deux points B et D diamétralement opposés, tels que (BD) ne soit pas perpendiculaire à (AC).

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme quelconque puisque ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu E et ne sont ni égales, ni perpendiculaires. Il appartient à la famille *f*.

2. Tous les parallélogrammes de la famille *f* ont pour centre E, milieu des diagonales.

Un rectangle est un parallélogramme qui a des diagonales de même longueur. Le rectangle AB'CD' (*en bleu*) a donc ses diagonales [AC] et [B'D'] de même longueur et $EA = EB' = EC = ED'$.

Les points B' et D' sont donc sur le cercle C_1.

3. Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires. Les sommets B'' et D'' des losanges AB''CD''(*en vert, en orange*) appartiennent donc à la droite perpendiculaire à (AC) passant par E.

Les points B'' et D'' sont donc sur la médiatrice de [AC].

4. Un carré est un rectangle et un losange particulier. Le parallélogramme AB'''CD''' est un carré si ses sommets B''' et D''' sont d'une part sur le cercle C_1, d'autre part sur la médiatrice de [AC].

Il y a donc un unique carré (*en orange*) dans la famille *f*.

Exercice 5

1. Puisque les points M et N appartiennent au côté [AB], et les points S et T appartiennent au côté [BC], le point B est à l'intersection des deux droites (MN) et (TS).

On sait que le point O est à l'intérieur du quadrilatère et appartient à l'une de ses diagonales, MAIS attention on ne dit pas que O est le centre du parallélogramme. Il y a donc de nombreuses possibilités :

La figure a. montre le cas où O appartient à la diagonale [BD]

- Tracer la droite (BO). Placer un point D sur (BO), de telle sorte que O appartienne au segment [DB], puis tracer les deux droites parallèles respectivement à (MN) et à (TS) passant par D. On veillera à choisir D de sorte que les parallèles à (MN) et (TS) passant par D coupent ces droites en dehors de [TS] et [MN], afin de respecter la troisième contrainte. Ces deux droites coupent respectivement (TS) en C et (MN) en A. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

La figure b. montre le cas où O appartient à la diagonale [AC].

- Tracer une droite passant par O qui coupe (MN) et (TS) respectivement en A et C, à l'extérieur des deux segments [MN] et [TS]. Tracer la droite parallèle à (TS) passant par A et la droite parallèle à (MN) passant par C. Ces deux droites se coupent en D.

La figure c. montre le cas où O est le centre du parallélogramme (*non spécifiquement demandé*)

- Tracer la droite symétrique (M'N') symétrique de (MN) par rapport à O, et la droite (T'S') symétrique de (TS) par rapport à O. Ces deux droites se coupent en D. Le point O est le centre du parallélogramme.

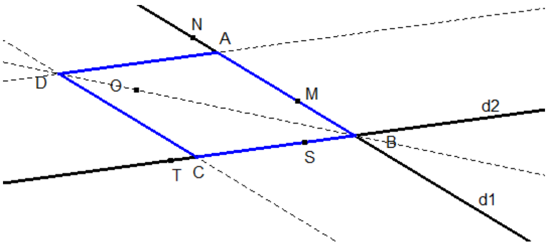


fig. a

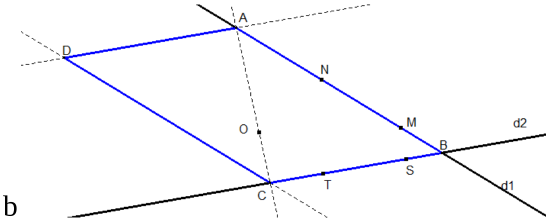


fig. b

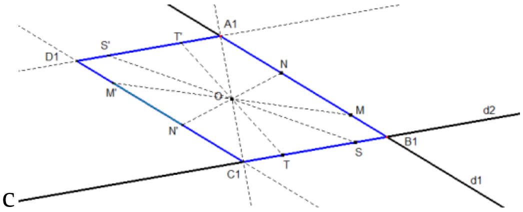


fig. c

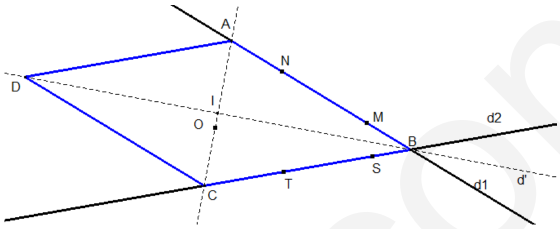


fig. d

La figure d. montre le cas où ABCD est un losange.

- Tracer la bissectrice *d'* de l'angle $\widehat{MBS}$, qui sera une diagonale du losange. Attention, cette droite n'est en général pas (BO). Pour obtenir la seconde diagonale, tracer la droite perpendiculaire à *d'* passant par O. Elle coupe respectivement les droites (MN) et (TS) en A et C. Tracer [AC]. Construire le point D symétrique de B par rapport à I.

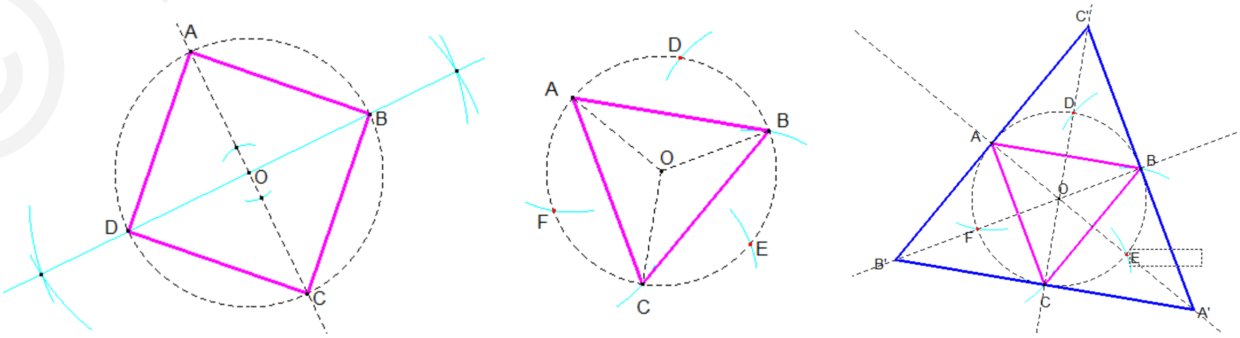
  ABCD est un losange de centre I.

2. Ces constructions du parallélogramme s'appuient sur le parallélisme des côtés opposés. La construction du losange s'appuie sur les deux symétries présentes dans cette figure : les diagonales sont toutes deux axes de symétrie, donc orthogonales entre elles et se coupant en leur milieu, centre du losange.

Exercice 6

1. Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, de même longueur et perpendiculaires, alors c'est un carré. On place un point A sur le cercle puis le point C diamétralement opposé. On construit la médiatrice de [AC]. Les deux points d'intersection avec le cercle sont les points B et D cherchés. En effet, les diagonales [AC] et [BD] sont deux diamètres perpendiculaires et vérifient les propriétés.

2.



Un triangle équilatéral a trois côtés de même longueur et trois angles de 60°.

Soit A un point du cercle. En reportant cinq fois successivement sur le cercle la longueur du rayon du cercle, on construit un hexagone régulier ADBECF. ABC est un triangle équilatéral. En effet l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc AC. Cet angle inscrit a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOC}$.Or cet angle mesure $360° : 3$ *soit* $120°$. Donc $\widehat{ABC}$ mesure 60°. Il en est de même pour les deux autres angles du triangle ABC.

3. Dans la symétrie axiale d'axe (AB), le triangle ABC a pour image le triangle ABC'. On a donc $AC = AC' \text{ et } BC = BC'$. Dans la symétrie axiale d'axe (AC), le triangle ABC a pour image le triangle AB'C. On a donc $AB = AB' \text{ et } BC = B'C$. Dans la symétrie axiale d'axe (BC), le triangle ABC a pour image le triangle A'BC. On a donc $AB = A'B \text{ et } AC = A'C.$ D'autre part $AB = AC = BC$.

D'où $AB' = B'C = AC = BC = A'B = A'C = AB = BC' = AC'$.

On peut donc en déduire, d'une part que A, B, C sont les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB], d'autre part que $A'B' = A'C' = B'C'$. Le triangle A'B'C' est donc équilatéral.

4. Dans le triangle équilatéral A'B'C', les droites (AA'), (BB'), (CC') passent par un sommet et par le milieu du côté opposé. Elles sont donc à la fois médiatrices et bissectrices. Elles sont concourantes en O. Le cercle initial de rayon OA, OB, OC est donc le cercle inscrit à ce triangle.