S13C. Autour des théorèmes de PYTHAGORE et THALES Corrigé

Mise en route

A. Dans chaque exercice une configuration à reconnaître… une propriété à connaitre…une démonstration à rédiger

1. Si le triangle ARC est rectangle en A, d'hypoténuse [RC], alors d'après le théorème de Pythagore,

$AR^2 + AC^2 = RC^2 \qquad 5^2 + AC^2 = 13^2 \qquad AC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

AC est une longueur positive donc $AC = \sqrt{144}$ soit $x = 12\ cm$

2. *NUL* est un triangle tel que $NU = 42\ cm,\ LU = 46 cm\ et\ LN = 62\ cm$. LN est le plus grand côté. Il faut étudier si *LN²* est égal ou n'est pas égal à *LU²+NU²*

On calcule séparément $LU^2 + NU^2 = 42^2 + 46^2 = 1764 + 2116 = 3880\ et\ LN^2 = 62^2 = 3844$

$LN^2 \neq LU^2 + NU^2$ Selon la contraposée du théorème de Pythagore, NUL n'est pas rectangle.

· Les points *N, I, L* sont tels que $NI = 14\ cm,\ LI = 16\ cm\ et\ LN = 35\ cm$. *Question piège car le triangle NIL n'existe pas…* En effet dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des deux autres ; en cas d'égalité le triangle est aplati et les points sont alignés. Il s'agit de l'inégalité triangulaire.

Ici $NI < NL + LI\ car\ 14 < 16 + 35 \qquad LI < NI + NL\ car\ 16 < 14 + 35 \qquad mais\ NL > NI + LI\ car\ 35 > 16 + 14$

Il n'y a donc pas de triangle.

3. NEZ est un triangle tel que $NE = 75\ cm$, $EZ = 45\ cm\ et\ NZ = 60\ cm$. Pour démontrer que ce triangle est rectangle (*c'est énoncé dans la question*), on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore :

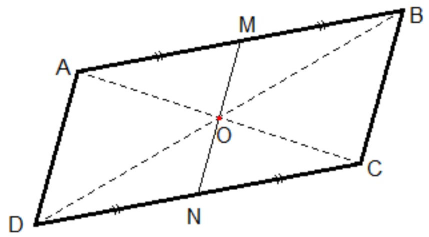
Si $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$ alors le triangle NEZ est rectangle

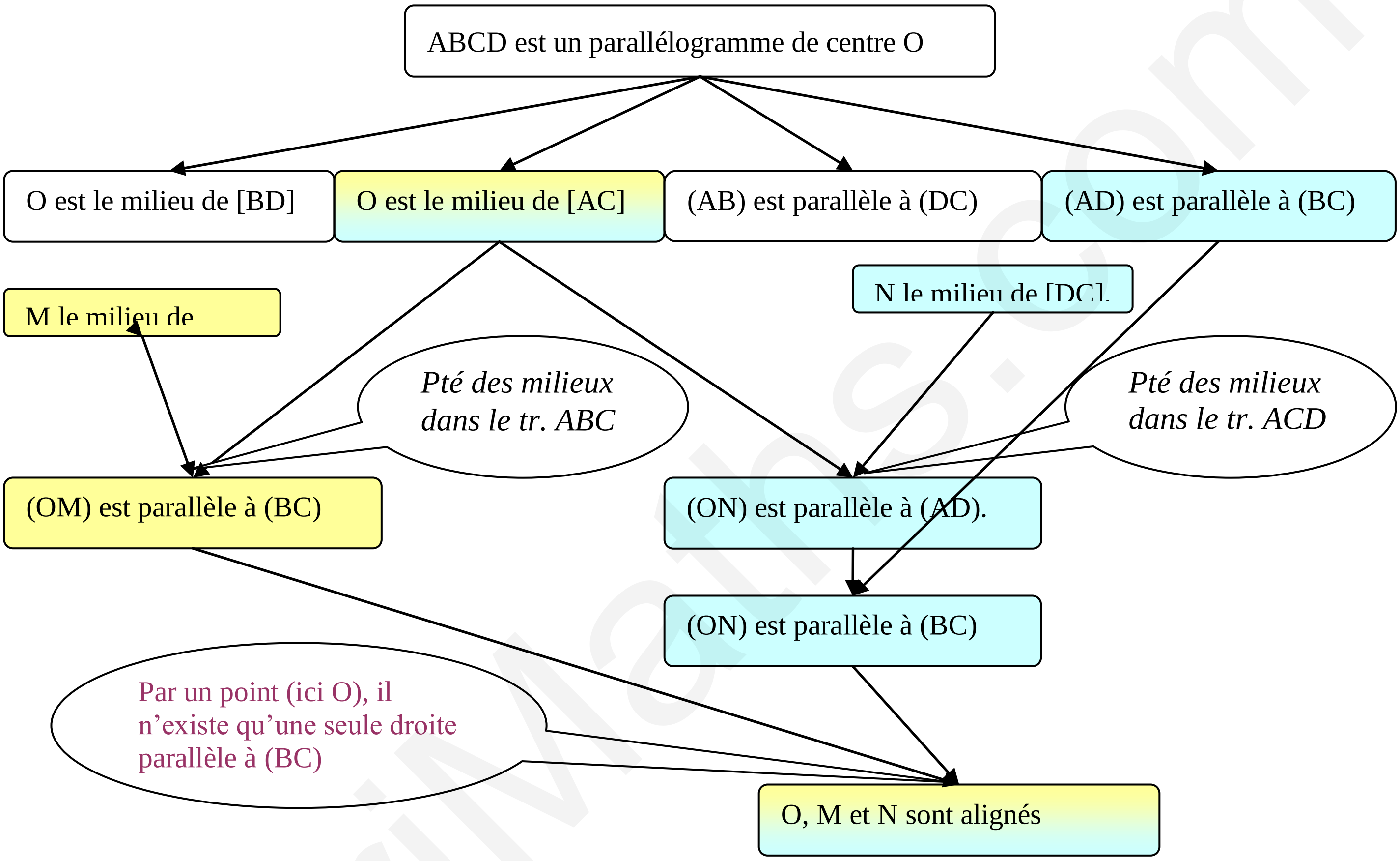
$NE^2 = 5625 \qquad EZ^2 + NZ^2 = 2025 + 3600 = 5625 \qquad$ donc $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$

Le triangle NEZ est bien rectangle, d'hypoténuse [NE].

4. La démonstration est présentée ci-après sous la forme d'un organigramme (ou déductogramme).Il peut être très utile à faire au brouillon pour organiser son raisonnement avant de le rédiger : de chaque hypothèse peuvent découler des données supplémentaires qui vont se conjuguer entre elles pour pouvoir appliquer les propriétés du cours.

Ici la configuration de la figure et de l'énoncé amènent à penser à la propriété : Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.





5. O et O' sont les centres des cercles placés respectivement sur les diamètres [AC] et [AD].

Dans le triangle ACD, le segment [OO'] joint les milieux des deux côtés [AC] et [AD], alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. Comme $OO' = 5cm,\ CD = 10cm$.

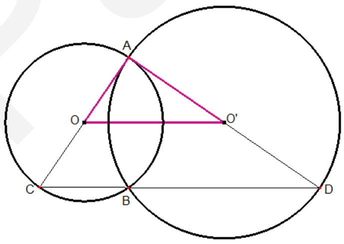


fig.5

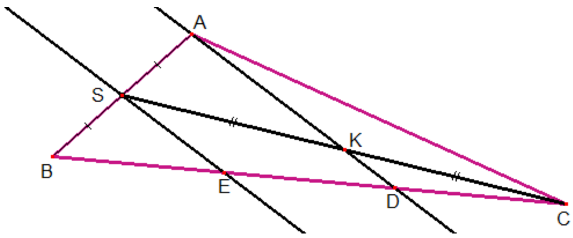


fig.6

6. Dans le triangle SEC, (SE) est parallèle à (AK) donc à (KD) puisque A, K, D sont alignés. On sait aussi que K est le milieu de [SC].

La droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu. Donc D est le milieu [EC] et $ED = DC$.

De même dans le triangle ABD, (SE) est parallèle à (AK) donc à (AD). On sait aussi que S le milieu de [AB] donc E est le milieu de [BD] et $BE = ED$. On en déduit que $BE = ED = DC$. Le segment [BC] est bien partagé en trois segments égaux et $BE = ED = DC = \dfrac{BC}{3}$.

7. $OA = 6\ cm,\ OB = 9\ cm\ et\ AB = 4{,}5\ cm$. Les points O, E, A sont alignés et $OE = 5\ cm$.

Les deux droites (OA) et (OB) sont sécantes en O, coupées par deux droites parallèles (EF) et (AB).

Les points 0, E, A et O, F, B sont alignés dans le même ordre. D'après le théorème de Thalès,

$\dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OF}{OB} = \dfrac{EF}{AB}$ .Soit $\dfrac{5}{6} = \dfrac{OF}{9} = \dfrac{EF}{4{,}5}$. On en déduit que $OF = \dfrac{45}{6} = 7{,}5cm$ et $EF = \dfrac{5 \times 4{,}5}{6} = 3{,}75cm$

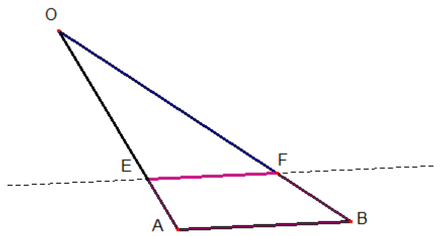


fig.7

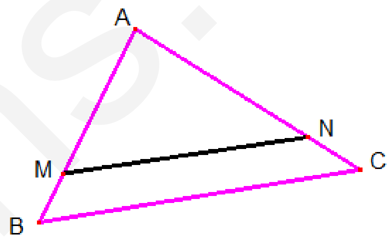


fig.8

8. $AB = 4cm,\ AC = 5cm\ et\ BM = CN = 1cm\ donc\ AM = 3cm\ et\ AN = 4cm$

Les deux droites (AB) et (AC) sont sécantes en A et sont coupées par les deux droites (MN) et (BC).

Les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. Pour savoir si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, on va étudier si les rapports $\dfrac{AM}{AB}\ et\ \dfrac{AN}{AC}$ sont égaux ou ne le sont pas. On les calcule séparément :

$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$ $\qquad$ $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Les rapports ne sont pas égaux donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

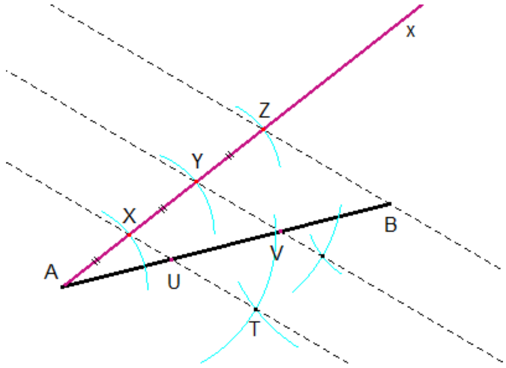
B. Partage d'un segment

1. Méthode classique de partage en trois d'un segment [AB]

a. Tracer une demi-droite d'origine A puis tracer successivement sur celle-ci, à partir de A trois segments de même longueur [AX], [XY], [YZ]. Joindre B et Z.

Pour tracer la parallèle à (BZ) passant par X, on trace un arc de cercle de centre X de rayon BZ, puis un arc de cercle de centre B de rayon XZ. Les deux arcs de cercle se coupent en un point T qui est le quatrième sommet du parallélogramme BZXT. Les droites (BZ) et (XT) sont parallèles. (XT) coupe [AB] en U.

b. Pour terminer le partage en trois de [AB], on trace de même la parallèle à (BZ) passant par Y. Elle coupe [AB] en V. Les points U et V partagent le segment [AB] en trois segments de même longueur.



c. Les droites (UX), (VY) et (BZ) sont parallèles par construction. Elles coupent les deux droites sécantes (AB) et (AZ). D'après le théorème de Thalès dans le triangle AYV, les longueurs des côtés des deux triangles AXU et AYV sont proportionnelles :

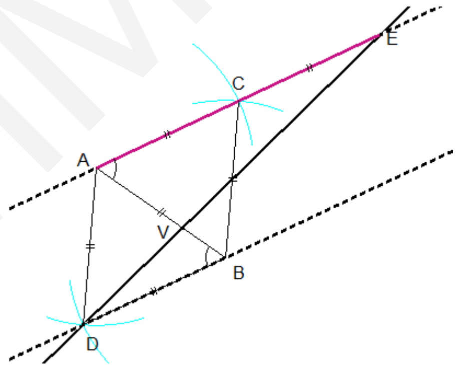
$$\frac{AU}{AV}=\frac{AX}{AY}=\frac{UX}{VY} \quad Comme\ AX=XY=YZ,\ \frac{AX}{AY}=\frac{1}{2},\ donc\ \frac{AU}{AV}=\frac{1}{2}$$

De même, d'après le théorème de Thalès dans le triangle ABZ, les longueurs des côtés des deux triangles AYV et AZB sont proportionnelles :

$$\frac{AV}{AB}=\frac{AY}{AZ}=\frac{VY}{BZ} \quad Comme\ AX=XY=YZ,\ \frac{AY}{AX}=\frac{2}{3},\ donc\ \frac{AV}{AB}=\frac{2}{3}$$

On a alors $AU=\frac{1}{2}AV=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}AB=\frac{1}{3}AB$. U est bien au tiers du segment [AB] en partant de A.

2. Deuxième méthode de partage en trois



a. Pour montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles, on peut prouver que le quadrilatère ACBD est un losange. En effet, il a quatre côtés égaux car les deux triangles ACB et ADB sont équilatéraux de même base [AB]. Ses côtés opposés sont donc parallèles et (AC) est parallèle à (BD). On peut aussi utiliser les égalités d'angles. En effet, les deux triangles étant équilatéraux, leurs angles respectifs mesurent 60°, en particulier $\widehat{CAB}=\widehat{ABD}=60°$**.** La droite (AB) coupe les droites (AC) et (BD) en déterminant des angles alternes-internes égaux. Ces deux droites sont donc parallèles.

b. Les droites (DE) et (AB) sont sécantes en V. Les points A, V, B et E, V, D sont donc alignés. D'autre part, E étant le symétrique de A par rapport à C, les points A, C, E sont alignés.

Les droites (AC) et (BD) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès (configuration du « papillon »), les longueurs des côtés des triangles VAE et VBD sont proportionnelles : $\dfrac{VA}{VB}=\dfrac{VE}{VD}=\dfrac{AE}{BD}$

Les deux triangles ABC et ABD étant isométriques et équilatéraux $AC=BD$. De plus E étant le symétrique de A par rapport à C $AE=2AC$. D'où $\dfrac{AE}{BD}=\dfrac{AE}{AC}=2$. On en déduit que $\dfrac{VA}{VB}=2,\ soit\ VA=2VB$. Le point V partage bien le segment [AB] en deux parties telles que VB soit le tiers de AB.

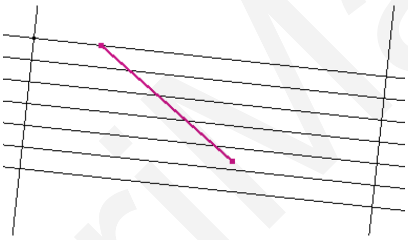
3. Généralisation de la méthode classique en un partage en cinq

Pour partager en cinq un segment [AB]

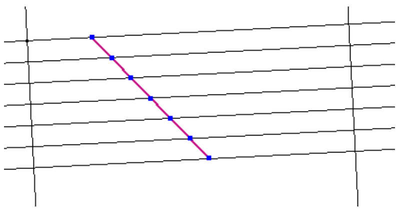
- Tracer une demi-droite [A*x*)
- Sur cette demi-droite, reporter successivement, à partir de A, cinq fois un segment « unité».
- On obtient les points X_1, X_2, X_3, X_4. Le dernier point se nomme X_5.
- Tracer la droite (BX_5), puis les droites qui lui sont parallèles passant par chacun des points précédents. Ces droites coupent le segment [AB] en cinq points qui le partagent en cinq segments de même longueur.

4. Méthode du « guide-âne » : exemple de partage en 6

On appelle guide-âne, un calque comportant un réseau de droites parallèles. On choisira le nombre de parallèles en fonction du partage souhaité



Etape 1



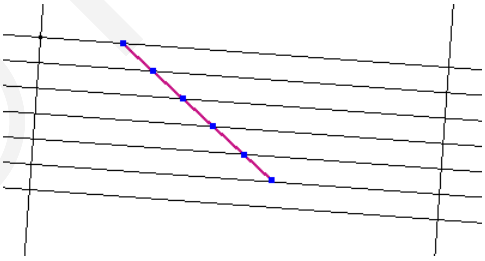
Etape 2

Etape 1 : On pose le calque sur le segment en alignant une extrémité du segment sur une des droites

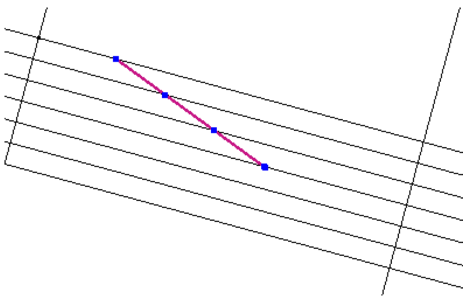
Etape 2 : On fait tourner le « guide-âne » pour aligner l'autre extrémité sur la 7ème droite (6 intervalles)

Chaque parallèle détermine un point sur le segment qui correspond au partage recherché.

Exemple de partage en 5



Exemple de partage en 3



Remarque : il est seulement nécessaire que le segment [AB] ait une longueur supérieure à l'écart entre les deux parallèles « extrêmes » (celles qui passent par les extrémités du segment) pour que le partage soit possible.

Pour s’exercer

Exercice 1. *Voici une démonstration rédigée utilisant la même propriété que celle de l’organigramme de la question A4.*

Les données :

- Deux cercles *C et C’* de centres respectifs I et J, sécants en M et N.
- A est le second point d’intersection du cercle *C* et de la droite (MI).
- B est le second point d’intersection du cercle C’ et de la droite (MJ).

La démonstration :

Les points A et M sont sur le cercle (*C*), alignés avec I centre du cercle, donc I est le milieu de [MA]. De même, J est le milieu de [MB]. *Dans le triangle MAB, la droite qui joint le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté*. La droite (IJ) est donc parallèle à la droite (AB).

MAIS… cela ne prouve pas que (AB) passe par N. Il faut donc le justifier…

I est le centre du cercle (*C*), donc I est équidistant de M et de N.

J est le centre du cercle (*C’*) donc J est aussi équidistant de M et de N.

La droite (IJ) est donc la médiatrice de [MN], donc perpendiculaire à [MN].

Le triangle AMN est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AM] donc il est rectangle en N, et (MN) est perpendiculaire à (AN).

Le triangle BMN est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [BM] donc il est rectangle en N, et (MN) est perpendiculaire à (BN).

Par le point N, il n’existe qu’une seule droite perpendiculaire à (MN). Les points A, N, et B sont donc alignés.

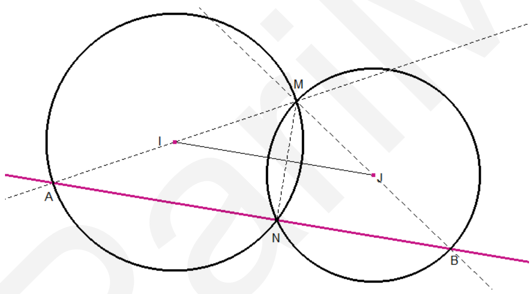


fig.1

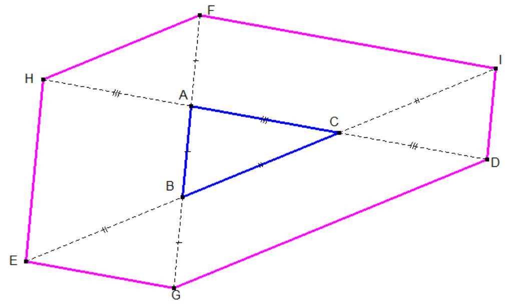
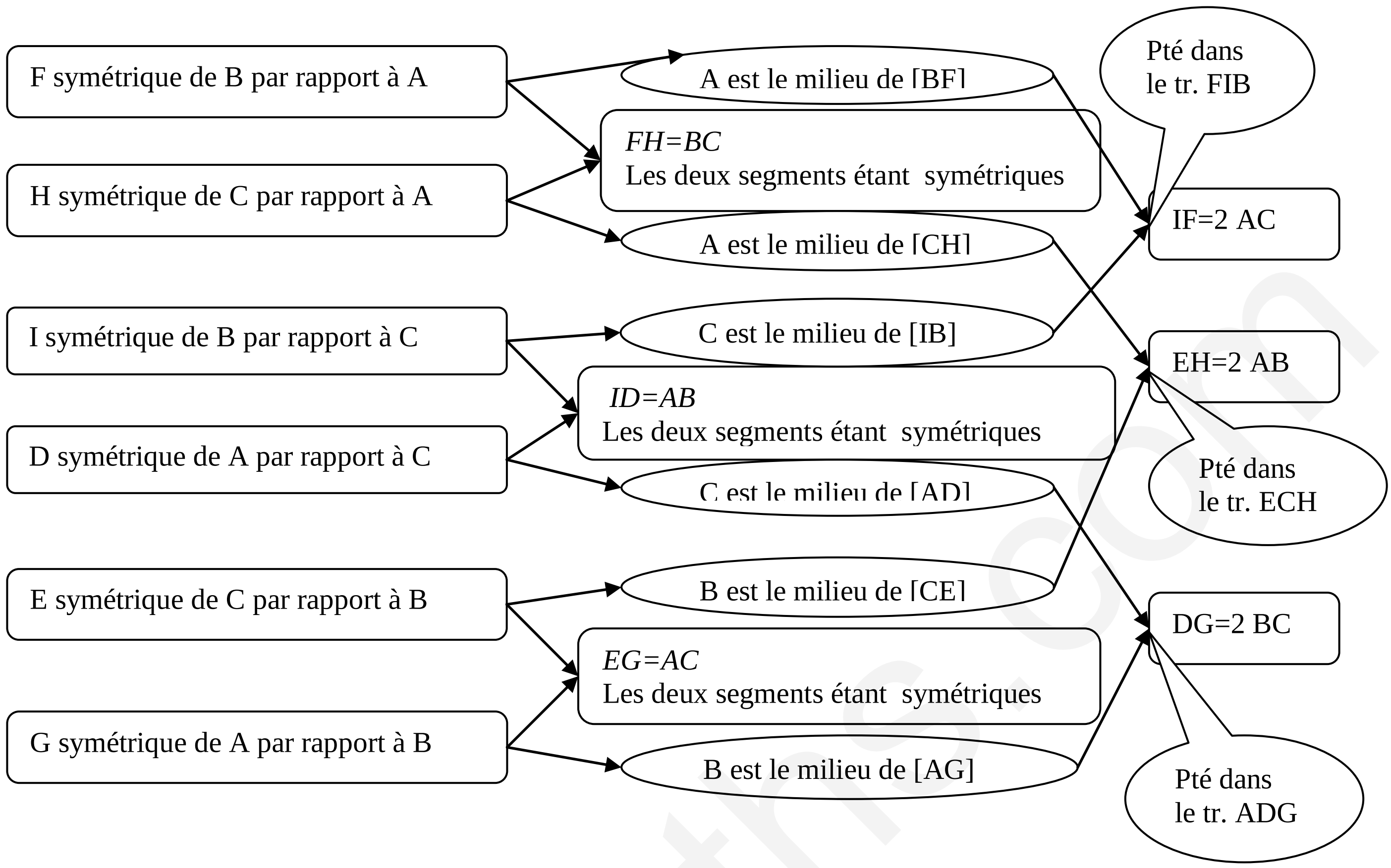


fig.2

Exercice 2. *Cet exercice se prête bien à la présentation sous forme d’organigramme (voir ci-après)*

Conclusion à prouver : Le périmètre de FHEGDI est le triple du périmètre du triangle ABC.



Le périmètre de *FHEGDI* est égal à :

$FH+HE+EG+GD+DI+IF=BC+2AB+AC+2BC+AB+2AC=\ 3AB+3AC+3BC$

Il est donc bien égal au triple du périmètre du triangle ABC.

Exercice 3

a. $DE=13cm,\ DF=12cm.$ Le point F est sur le cercle de diamètre [DE]. Le triangle DEF est donc inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés ; il est donc rectangle d'hypoténuse [DE]. D'après le théorème de Pythagore, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :

$DE^2=DF^2+EF^2 \qquad 13^2=12^2+EF^2 \qquad EF^2=169-144=25 \qquad EF=5cm$

b. M sur [DE], N sur [DF], $DM=4cm$ et (MN) est perpendiculaire à [DF].

Dans le triangle DEF, les droites (EF) et (MN) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (DF) ; elles sont donc parallèles. Dans le triangle DEF, les points D, M, E et D, N, F sont respectivement alignés dans cet ordre sur les deux droites sécantes (DE) et (DF). D'après le théorème de Thalès, on a donc égalité des rapports de longueur : $\frac{DM}{DE}=\frac{DN}{DF}=\frac{MN}{EF} \qquad \frac{4}{13}=\frac{DN}{12}=\frac{MN}{5}$

On en déduit que $MN=\frac{20}{13}$ *et* $DN=\frac{48}{13}$ et que $NF=DF-DN=12-\frac{48}{13}=\frac{108}{13}$

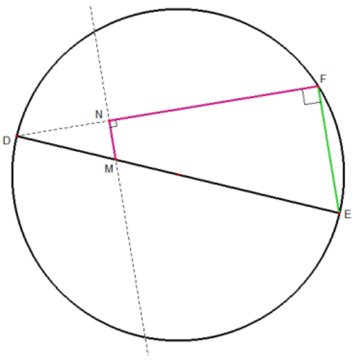


fig.3

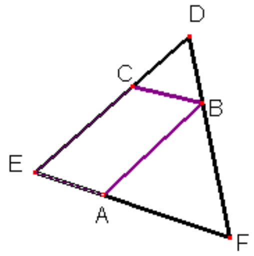


fig.4

Exercice 4

A sur [EF], B sur [DF], C sur [DE] $EA = DB = DC = 3cm$.

Le triangle DEF étant équilatéral, ses trois côtés ont même longueur. Comme son périmètre mesure *27cm*, on a : $DE = EF = DF = 9cm$. Puisque $DB = DC = 3cm$, on en déduit que $\frac{DC}{DE} = \frac{DB}{DF} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Les points D, C, E et D, B, F étant alignés dans le même ordre respectivement sur les droites (DE) et (EF), d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CB) et (EF) sont parallèles, plus précisément les segments [BC] et [EA]. On en déduit aussi que le troisième rapport de longueur est égal aux deux précédents d'où $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ donc BC= $\frac{1}{3} \times 9 = 3cm$. D'où $BC = EA$.

Le quadrilatère ABCE a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

Exercice 5.

Si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle. $OL^2 = 5^2 = 25$ $BO^2 + BL^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. D'où $BO^2 + BL^2 = OL^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BOL est donc rectangle, d'hypoténuse [OL].

Si le triangle *BIP* est une réduction de rapport $\frac{3}{4}$ du triangle *BOL*, les longueurs de ses côtés sont proportionnelles à celles du triangle *BOL* dans le rapport $\frac{3}{4}$. Il sera aussi rectangle, les angles étant conservés dans les réductions ou agrandissements de figures.

Première méthode

$BI = \frac{3}{4} \times BL = \frac{12}{4} = 3cm$ $BP = \frac{3}{4} \times BO = \frac{9}{4} = 2,25cm$ $IP = \frac{3}{4} \times OL = \frac{15}{4} = 3,75cm$

Le périmètre de *BIP* est égal à : $3 + 2,25 + 3,75 = 9cm$. L'aire de *BIP* est égal à : $\frac{3 \times 2,25}{2} = 3,375cm^2$

Seconde méthode : Si les dimensions du triangle sont réduites dans le rapport $\frac{3}{4}$, alors son périmètre est réduit dans le même rapport, et son aire dans le rapport $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

Le périmètre du triangle BOL est égal à $3+4+5=12cm$. Celui du triangle BIP mesure donc $12\times\frac{3}{4}=9cm$

L'aire du triangle BOL est égale à $\frac{3\times4}{2}=6cm^2$. Celle du triangle BIP mesure $6\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=6\times\frac{9}{16}=3{,}375cm^2$

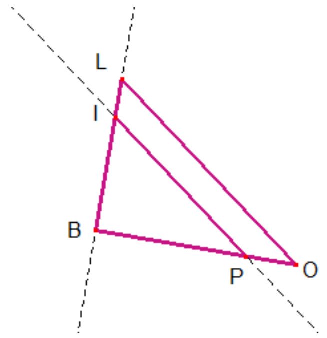


fig.5

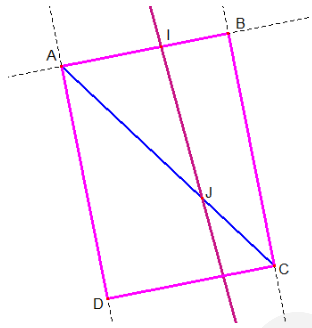


fig.6

Exercice 6

1. [AC] est la diagonale du rectangle où $AD=BC=7$ *et* $AB=DC=5$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC, $AC^2=AB^2+BC^2$

$d'où\ AC^2=25+49=74 \qquad AC=\sqrt{74}\ (longueur\ positive)$

2. A, I, B d'une part et A, J, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On peut calculer $\frac{AI}{AB}$ *et* $\frac{AJ}{AC}$: $\frac{AI}{AB}=\frac{3}{5}=0{,}6$ et $\frac{\mathrm{AJ}}{\mathrm{AC}}=\frac{5{,}1}{\sqrt{74}}\approx0{,}59286...$

Les deux rapports ne sont pas égaux, les droites ne sont donc pas parallèles, d'après la contraposée du théorème de Thalès.

Remarque : prudence quand on compare des rapports, il est préférable de faire la comparaison sur des valeurs exactes. Ici l'un des deux rapports donne une valeur exacte, on peut donc conclure.

Exercice 7

a. Si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

$$AP^2=3{,}6^2=12{,}96 \qquad AM^2=6^2=36 \qquad PM^2=4{,}8^2=23{,}04 \qquad AP^2+PM^2=AM^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AMP est rectangle en P.

b. Dans le triangle AEF les points A, M, E et A, P, F sont alignés et les droites (EF) et (MP) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, les côtés des triangles AMP et AEF ont leurs longueurs proportionnelles

$$\frac{AM}{AE}=\frac{AP}{AF}=\frac{MP}{EF} \qquad \frac{6}{AE}=\frac{4{,}8}{6}\ d'où\ AE=6\times6:4{,}8=7{,}5\ \ donc\ ME=AE\text{ - }AM=1{,}5$$

c. Les droites (PC) et (MB) sont sécantes en A. Les points P, A, C et M, A, B sont alignés dans le même ordre. $\frac{AP}{AC}=\frac{3{,}6}{4{,}5}=0{,}8\ \ et\ \ \frac{AM}{AB}=\frac{6}{7{,}5}=0{,}8$. Les rapports sont égaux donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MP) et (BC) sont parallèles.

d. Les droites (PC) et (MB), sécantes en A, sont coupées par les droites (MP) et (BC) parallèles. Elles déterminent des angles alternes internes égaux, donc $\widehat{CBA}=\widehat{AMP}$

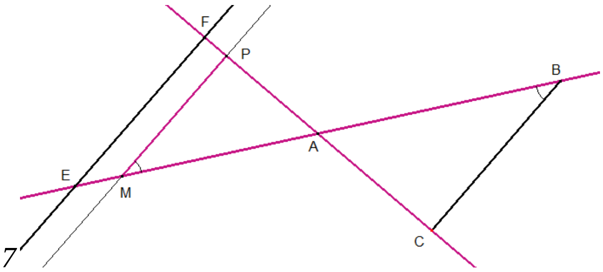


fig.7

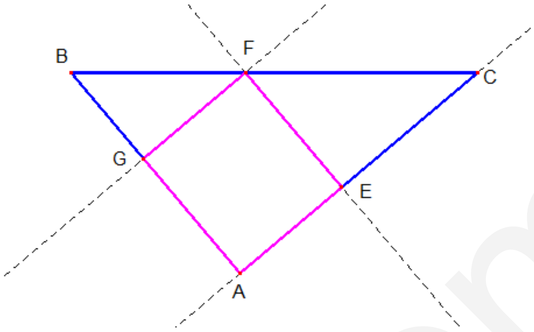


fig.8

Exercice 8

1. [BC] étant le plus grand côté, si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

$AB^2 = 5,25^2 = 27,5625$ $BC^2 = 8,75^2 = 76,5625$ $AC^2 = 7^2 = 49$ d'où $BC^2 = AB^2 + AC^2$

La réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée donc le triangle est rectangle en A.

2.a. Les points A, E, C sont alignés. $EC = 4$ $AC = 7$ $donc\ AE = 7 - 4 = 3$

b. Les droites (AB) et (EF) sont parallèles, coupées par deux sécantes (CA) et (CB).

Elles déterminent deux triangles CEF et CAB « disposés selon une configuration du théorème de Thalès ».

C, A, E d'une part et C, F, B d'autre part sont alignés.

D'après le théorème de Thalès, les côtés des deux triangles CEF et CAB ont leur longueurs proportionnelles

et $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{EF}{AB}$ $d'où$ $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{EF}{AB}$ $\dfrac{4}{7} = \dfrac{EF}{5,25}$ $d'où\ EF = \dfrac{4 \times 5,25}{7} = 3$3.

3. (AB) est parallèle à (EF), donc [AG] est parallèle à [EF], les points A, G, B étant alignés. (AC) est parallèle à (GF), donc [AE] est parallèle à [GF], les points A, E, C étant alignés.

Le quadrilatère AEFG a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est donc un parallélogramme.

On a $AE = 3\ et\ EF = 3$. Il a donc deux côtés consécutifs de même longueur. C'est donc un losange.

De plus, on sait que le triangle ABC est rectangle en A, l'angle $\hat{A}$ est donc droit.

Un losange ayant un angle droit est un carré. Le quadrilatère AEFG est donc un carré.