S15C. Autour des NOMBRES REELS Corrigé

Mise en route

A. Seule l'égalité $\frac{1}{5}=0,2$ est vraie.

L'égalité $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{5}$ est fausse car $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ et $\frac{1}{20}=0,50$ est fausse car $\frac{1}{20}=0,05$.

Les autres résultats sont toutes des valeurs approchées $\frac{1}{3}\approx 0,333$; $\sqrt{2}\approx 1,414$; $\pi \approx 3,14$; les égalités sont donc fausses.

B. Quand on divise 19 par 13 à la calculatrice, celle-ci affiche 1,461538462, le dernier chiffre affiché présente un arrondi (15 est arrondi à 2), la division posée montre une périodicité dans les chiffres significatifs du quotient $1,\overline{461538}$. La valeur exacte du quotient décimal de 19 par 13 est donc égal à $\frac{19}{13}$.

· Une écriture décimale périodique illimitée est (sauf cas particulier de 9) celle d'un nombre rationnel ici $\frac{19}{13}$.

· La période comprend 6 chiffres qui vont donc se répéter. La 5$^{\text{ème}}$ décimale est 3.
$26=6\times 4+2$. La 26$^{\text{ème}}$ décimale est donc 6 (deuxième chiffre)
$40=6\times 6+4$. La 40$^{\text{ème}}$ décimale est 5 (quatrième chiffre)

· Pour donner une troncature à quatre décimales, on coupe la partie décimale après le quatrième chiffre soit 1,4615.

· $19=13\times 1+6$.Le quotient euclidien de 19 par 13 est donc 1 et on peut écrire $1<\frac{19}{13}<2$

· Encadrement de A au centième près : $1,46<\frac{19}{13}<1,47$

· On peut donner une valeur approchée par défaut de ce quotient au centième près 1,46 ou une valeur approchée par excès : 1,47.

· $\frac{19}{13}=1,\overline{461538}$. Pour donner un arrondi au rang *n*, il faut regarder le chiffre de rang *n+1*.
Si celui-ci est supérieur ou égal à 5, on arrondit le chiffre de rang *n* au dixième supérieur. C'est le cas pour l'arrondi au dixième : 1,5 (ou au millième : 1,462 ou au cent-millième : 1,46154)
Si celui-ci est inférieur à 5, on lit directement l'arrondi. C'est le cas pour l'arrondi au centième : 1,46 (ou au dix-millième : 1,4615)

C. $A=\frac{364}{1001}=0,\overline{36}$ et $B=\frac{384}{275}=1,39\overline{63}6$.

Ce sont donc des rationnels non décimaux puisque ces quotients ont une écriture décimale illimitée périodique (distincte de 9).

On sait qu'une fraction est décimale (donc représente un nombre décimal) si le dénominateur de la fraction irréductible associée ne présente que des facteurs 2 ou 5. On peut donc regarder si ces fractions sont irréductibles : $\frac{364}{1001}=\frac{4\times 91}{11\times 91}=\frac{4}{11}$ et $\frac{384}{275}=\frac{2^7\times 3}{5^2\times 11}$ sont irréductibles et leurs dénominateurs présentent tous deux le facteur 11. Ces deux fractions ne sont donc pas décimales.

Pour les ajouter on cherche le dénominateur commun qui est le *ppcm* de 275 et 11, soit 275, puisque 275 est un multiple de 11. $\frac{364}{1001}+\frac{384}{275}=\frac{4}{11}+\frac{384}{275}=\frac{100}{275}+\frac{384}{275}=\frac{484}{275}$ =1,76. C'est donc un nombre décimal.

D. Soit $A=\frac{a}{85}$ et $B=\frac{85}{b}$

- Pour que A et B soient un entier naturel il faut choisir *a* multiple de 85 et *b* diviseur de 85. Par exemple :

  $A=\frac{a}{85}=\frac{170}{85}=2$ et $B=\frac{85}{5}=17$ *ou* $\frac{85}{17}=5$ *ou* $\frac{85}{1}=85$ *ou* $\frac{85}{85}=1$

- Pour que A et B soient décimaux non entiers naturels, on peut choisir $A=\frac{a}{85}=\frac{34}{85}=\frac{2\times 17}{5\times 17}=\frac{2}{5}$ (il faut qu'après simplification le dénominateur ne comporte que des facteurs 5).

  Pour B, par exemple : $B=\frac{85}{b}=\frac{85}{10}=8,5$

- Pour que A et B soient rationnels non décimaux, il faut choisir des valeurs de *a* et de *b* pour lesquels la fraction irréductible ne soit pas décimale. Par exemple : $A=\frac{a}{85}=\frac{3}{85}$ *ou* $\frac{5}{85}=\frac{1}{17}$ et $B=\frac{85}{b}=\frac{85}{11}$

E. Mettre une croix dans toutes les cases pour lesquelles la réponse est "oui".

Le nombre est :	$\frac{35}{10}=3,5$	$\sqrt{3}\approx 1,7320508.....$	$\frac{45}{3}=15$	$3,141592\leq\pi<3,141593$	$5,72=\frac{572}{100}$	$\sqrt{1+3}=2$
Entier			x			x
Décimal	x		x		x	x
Rationnel	x		x		x	x
Irrationnel		x		x		

F. 1. Soit $x=0,\overline{9}$, de période 9. 0n a alors $10x=9,\overline{9}$ $\quad 10x-x=9,\overline{9}-0,\overline{9}$ $\quad 9x=9$ $\quad x=1$

Donc $0,\overline{9}=1$.

2. $x=5,\overline{6}$ $\quad 10x=56,\overline{6}$ $\quad 9x=51$ $\quad x=\frac{51}{9}=\frac{17}{3}$

$x=19,\overline{78}$ $\quad 100x=1978,\overline{78}$ $\quad 99x=1978\text{-}19=1959$ $\quad x=\frac{1959}{99}=\frac{653}{33}$

Pour s'exercer[1]

Exercice 1[2]

a. Rangement en ordre croissant : $1{,}07 < 1{,}109 < 1{,}7 < 1{,}81$

On peut ici comparer chaque chiffre significatif de même rang afin de pouvoir ordonner les nombres. Le chiffre des unités étant le même 1, on regarde les chiffres des dixièmes qui sont respectivement dans l'ordre croissant 0, 1, 7, 8.

b. Par exemple $1{,}102 < 1{,}11 < 1{,}112 < 1{,}12$. En effet $1{,}102 < 1{,}110 < 1{,}112 < 1{,}120$

On écrit ici les parties décimales avec le même nombre de chiffres significatifs (ici au millième) pour pouvoir comparer les nombres et les ordonner.

c. $1{,}5h = 1h30\min = \dfrac{3}{2}h$ $\qquad 0{,}3h = 0{,}3\times 60\min = 18\min = \dfrac{3}{10}h$

$2{,}25h = 2h + 0{,}25h = 2h + \dfrac{1}{4}h = 2h15\min = \dfrac{9}{4}h$

$3{,}375h = 3h + 0{,}375h = 3h + 0{,}375\times 60\min = 3h + 22{,}5\min = 3h + 22\min + 30s \; ou \; \dfrac{3375}{1000}h = \dfrac{27\times 5\times 5\times 5}{5\times 5\times 5\times 8}h = \dfrac{27}{8}h$

Exercice 2

1. Un spectacle a duré 3 heures et 25 minutes, soit $3h25\min = (3+\dfrac{25}{60})h = \dfrac{205}{60}h = \dfrac{41}{12}h$. La fraction $\dfrac{41}{12}$ est irréductible et comporte un facteur 3 au dénominateur, ce n'est donc pas un nombre décimal.

2. La durée s'exprime $n + \dfrac{p}{60} = \dfrac{60n+p}{60} = \dfrac{60n+p}{2^2\times 5\times 3}$. Ce quotient est donc décimal seulement si le numérateur est multiple de 3. Or $60n$ est multiple de 3. Il suffit donc que p soit un multiple de 3 compris entre strictement entre 0 et 60. (On peut aussi remarquer qu'il suffit que $\dfrac{p}{60}$ soit décimal car n étant entier, il est décimal.)

Exercice 3

1. a. $\dfrac{29}{55} = \dfrac{29}{5\times 11}$ Cette fraction n'est donc pas décimale, puisque elle est irréductible et que son dénominateur comporte le facteur 11.

$\dfrac{39}{75} = \dfrac{3\times 13}{3\times 5^2} = \dfrac{13}{5^2}$. Après simplification, on obtient un dénominateur qui ne comporte que les facteurs 5. Ce nombre est donc décimal. Il est égal à : $\dfrac{13}{5^2} = \dfrac{13\times 2^2}{5^2\times 2^2} = \dfrac{52}{100} = 0{,}52$.

b. On peut réduire au même dénominateur ces deux fractions pour les comparer :

---

[1] D'après Martinique 2004 ; Aix Marseille 1996 ; Amiens 1998 ; Aix-Marseille 97 ; Aix-Marseille 1998

[2] Voir aussi sur les unités de temps la fiche méthode sur les conversions.

$\frac{29}{55}=\frac{29}{5\times 11}=\frac{29\times 5}{5^2\times 11}=\frac{145}{275}$ et $\frac{39}{75}=\frac{3\times 13}{3\times 5^2}=\frac{13}{5^2}=\frac{13\times 11}{5^2\times 11}=\frac{143}{275}$. On a donc $\frac{39}{75}<\frac{29}{55}$.

c. $\frac{39}{75}<\frac{29}{55}$ soit $0,52<0,5\overline{272}$

On peut intercaler par exemple $0,52<0,527<0,5\overline{272}$; il y a une infinité de nombres possibles.

d. On peut écrire par exemple cet encadrement $\frac{143}{275}<\frac{144}{275}<\frac{145}{275}$ avec $\frac{144}{275}=\frac{2^4\times 3^2}{5^2\times 11}$ qui n'est pas un nombre décimal (11 au dénominateur de la fraction qui est irréductible).

2.

$\begin{array}{llll} 9 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & 1 & 9 & 0 \\ & 0 & 1 & 0\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} 2\ 7 \\ \hline 3\ ,370 \end{array}$	On remarque que le reste 100 se répète à partir de la troisième décimale donc les chiffres obtenus au quotient vont eux aussi se répéter.

Quand on divise 38 par 7, les restes successifs sont 3, 2, 6, 4, 5, 1 puis ils se répètent. Dans le quotient, la partie décimale va alors se répéter aussi $5,\overline{428571}$.

Quand on divise 9 par 8, le quotient est décimal et égal à 1,125. Le reste est nul à partir du troisième rang.

Par contre si on divise 8 par 9, le reste est toujours 8, la partie décimale a donc une période qui est ici $0,\overline{8}$.

3. On convient de noter $x=3,\overline{012}$. Cette convention signifie que 012 est une période, et que ces chiffres vont se répéter indéfiniment.

$x=1,\overline{6}$ $\quad 10x=16,\overline{6}$ $\quad 9x=15$ $\quad x=\frac{15}{9}$

$y=2,\overline{09}$ $\quad 100y=209,\overline{09}$ $\quad 99y=207$ $\quad y=\frac{207}{99}=\frac{23}{11}$

Ne pas confondre la période $\overline{09}$ avec une période seulement du chiffre $\overline{9}$:

$t=2,0\overline{9}$ $\quad 10t=20,\overline{9}$ $\quad 100t=209,\overline{9}$ $\quad 90t=209,\overline{9}-20,\overline{9}=189$ $\quad t=\frac{189}{90}=\frac{9\times 21}{9\times 10}=\frac{21}{10}=2,1$

On peut remarquer qu'il est nécessaire ici de soustraire *10t* à *100t* pour obtenir un nombre entier.

$z=3,\overline{012}$ $\quad 1000z=3012,\overline{012}$ $\quad 999z=3012,\overline{012}-3,\overline{012}=3009$ $\quad z=\frac{3009}{999}=\frac{1003}{333}$

Exercice 4

La division euclidienne de 64 par 27 donne l'égalité $64=2\times 27+10$, d'où $\frac{64}{27}=\frac{2\times 27+10}{27}=2+\frac{10}{27}$.

Pour connaître le chiffre des dixièmes, on va chercher combien il y a de dixièmes dans $\frac{10}{27}$, c'est-à-dire combien il y a de fois $\frac{1}{10}$ dans $\frac{10}{27}$ en décomposant $\frac{10}{27}=(\frac{1}{10}\times 10)\times\frac{10}{27}=\frac{1}{10}\times\frac{100}{27}$ avec $100=27\times 3+19$

On peut alors écrire $\frac{64}{27}=2+\frac{10}{27}=2+\frac{1}{10}\times\frac{27\times3+19}{27}=2+\frac{1}{10}\times\frac{\cancel{27}\times3}{\cancel{27}}+\frac{1}{10}\times\frac{19}{27}=2+\frac{1}{10}\times3+\frac{1}{10}\times\frac{19}{27}$

Soit $\frac{64}{27}=2+\frac{10}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{19}{27}$

Le chiffre des dixièmes est donc **3**, car $\frac{1}{10}\times\frac{19}{27}$ est inférieur à un dixième (de l'ordre du centième).

Ce chiffre est le quotient euclidien de 100 par 27.

b. En appliquant à nouveau le même algorithme, $\frac{64}{27}=2+\frac{10}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{19}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}\times\frac{190}{27}$ ce qui montre que le rang de centièmes n'est pas nul, car $1<\frac{190}{27}<10$.

$190=7\times27+1$ $\quad\frac{64}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}\times\frac{7\times\cancel{27}+1}{\cancel{27}}=2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{1}{27}$

Le chiffre des centièmes est **7.**

Ce chiffre est le quotient euclidien de 190 par 27.

En poursuivant, $\frac{64}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{100}\times\frac{1}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1000}\times\frac{10}{27}$, ce qui montre que le chiffre des millièmes est égal à **0** car $28<\overline{cm}<33$.

$10=0\times27+10$, d'où $\frac{64}{27}=2+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{0}{1000}+\frac{1}{1000}\times\frac{10}{27}$

Ce chiffre est le quotient euclidien de 10 par 27.

On remarque qu'à l'étape suivante, on retrouve la même étape qu'au début avec $\frac{10}{27}$. Les chiffres de la partie décimale vont donc se répéter : 3, 7, 0 ainsi que les restes successifs 10, 19, 1. L'écriture décimale est donc illimitée et périodique.

A chaque étape de cet algorithme, le chiffre de la partie décimale représente le quotient euclidien respectivement de 100, 190, 10 par 27. Il est inférieur à 10, et donc s'écrit avec un seul chiffre. Cette remarque peut se généraliser avec les chiffres suivants.

Exercice 5

1. On veut : $3,\ 8276<3,\ 8??4<3,\ 834$ où deux chiffres sont à déterminer pour satisfaire l'encadrement.

a. Tout nombre solution va vérifier : $8276<8cm4<8340$ avec $2\le c\le3$.

Si *c=2*, alors *m=8* ou *m=9* ; si *c=3*, alors *m=0, m=1, m=2* ou *m=3*. Il y a donc six réponses possibles.

b. On considère le nombre $\overline{cm}$ formé par deux chiffres. On a alors $276<\overline{cm}4<340$. Comme $\overline{cm}4$ se termine par 4, cela revient à : $284\le\overline{cm}4<334$ soit $28<\overline{cm}<33$.

2. Soit $43,8276<D3,5cm4<53,834$. On voit que D ne peut être égal qu'à 5. En effet 43,8276 ne peut pas être inférieur à $43,\ 5cm4$ compte tenu du chiffre des dixièmes. Donc D égale 5 et

$43,8276<53,5cm4<53,834$

On remarque que quelque soit la valeur de *cm* la partie décimale 5*cm*4 est toujours inférieure à 8340. On peut donc choisir *c et m* entre 0 et 9 respectivement. Il y a donc 100 solutions.

Exercice 6

Enoncé 1 **: Faux.** Si l'on prend $2x = 5$, $2x$ est bien un entier naturel, mais $x = \frac{5}{2}$ n'est pas un entier.

Enoncé 2 : **Vrai**. En fait, $x = 2\times\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$. La somme de deux entiers naturels est un entier naturel, le double d'un entier naturel est un entier naturel. Donc si $\frac{x}{2}$ est un entier, x l'est aussi.

Enoncé 3 **: Faux**. Si $x+1$ vaut 0, alors x vaut -1 qui n'est pas un entier naturel. C'est le seul contre exemple qui suffit cependant à affirmer que l'énoncé est faux.