

S19C. Autour des GRANDEURS et de la MESURE (suite) Corrigé

Vitesse, Débit, Volume, Contenance...

Mise en route

I.

Faux car Distance réelle (km) $\times$ Echelle de la carte (sans unité) = Distance sur la carte¹ (km)

Vrai : Capital placé (en €) $\times$ Taux de placement (sans unité) = Intérêt du capital ((en €)

Faux car Durée du parcours (s) $\times$ Vitesse moyenne (m/s) = Distance parcourue (m)

Faux car Durée de l'écoulement (en s) $\times$ Débit moyen (en m³/s) = Volume écoulé (m³)

II. Si le grand cube est constitué de 512 petits cubes identiques, cela signifie que le nombre n de cubes sur une arête doit vérifier $n^3 = 512$, soit $n = 8$ que l'on peut trouver par essais successifs, ou en prenant la racine cubique de 512. L'arête du cube a pour longueur $8 \times 2 = 16\text{cm}$.

Le volume de ce cube est égal à $V_{\text{cube}} = 16^3 = 4096\text{cm}^3 = 4,096\text{dm}^3 = 4,096\text{l}$

L'aire totale de ce cube est la somme de l'aire des six faces carrées : $A_{\text{cube}} = 6 \times 16^2 = 1536\text{cm}^2 = 15,36\text{dm}^2$

III. Le volume d'un parallélépipède rectangle de dimensions x, y, z est égal au produit $x \times y \times z$.

On sait que $xy = 96$, $yz = 160$, $xz = 240$. D'où $xy \times yz \times xz = x^2 \times y^2 \times z^2 = (x \times y \times z)^2 = 3686400$

On en déduit que $V = x \times y \times z = 1920\text{cm}^3$

IV. La consommation de ce lustre pendant les quinze jours est égale à $c = 4 \times 0,040 \times 24 \times 15 = 57,6\text{KWh}$, le KWh étant une unité de mesure, produit des KW consommés par le temps de consommation en heures.

Le prix unitaire du kWh étant de 0,07650€, le coût total est $P = 57,6 \times 0,07650 = 4,4064\text{€}$

V. La vitesse de cette navette spatiale est égale à : $V = \frac{d}{t} = \frac{5,8 \times 10^6}{8 \times 24 + 22} = \frac{5,8 \times 10^6}{214} \approx 27102,8\text{km.h}^{-1}$

La valeur arrondie au km.h^{-1} est 27103 km.h^{-1} soit $2,7103 \times 10^4 \text{km.h}^{-1}$

VI. Première méthode : Pour un observateur immobile situé à l'extérieur des deux bateaux, ceux-ci se déplacent pendant la durée du dépassement, l'un à la vitesse de 12km.h^{-1} , l'autre à la vitesse de 25km.h^{-1} . On peut alors effectuer un changement de repère et se placer comme un observateur situé sur le bateau de plaisance. Le cargo semble alors se déplacer à une vitesse relative égale à la différence des deux vitesses soit

¹ Que l'on convertit en général en cm.

13 km.h^{-1} . Compte tenu des informations données dans l'énoncé, « le moment initial du déplacement correspond au moment où l'avant du cargo est à la hauteur de l'arrière du bateau de plaisance. Le moment final du dépassement correspond au moment où l'arrière du cargo est à la hauteur de l'avant du bateau de plaisance », la distance parcourue pendant le déplacement est égale à la somme des longueurs des deux bateaux soit 91m. On en déduit le temps de dépassement en heures, puis en minutes, et secondes en tenant compte que $1\text{h}=60\text{min}=3600\text{s}$: $V = \frac{d}{t}$ soit $t = \frac{d}{V} = \frac{0,091}{13} = 0,007\text{h} = 0,42\text{min} = 25,2\text{s}$

Deuxième méthode : Pour le cargo, soit t_0 la durée du dépassement et d_0 la distance parcourue pendant ce temps compte tenu de sa vitesse de 25 km.h^{-1} . La distance réelle parcourue liée au déplacement s'exprime donc par $d_0 + 0,091$. On en déduit que $t_0 = \frac{d_0 + 0,091}{25}$.

Pour le bateau de plaisance, la durée du déplacement est la même, la distance parcourue est seulement d_0 , la vitesse étant de 12km/h . D'où $t_0 = \frac{d_0}{12}$. On en déduit :

$$\frac{d_0}{12} = \frac{d_0 + 0,091}{25} \text{ soit } 25d_0 = 12(d_0 + 0,0091) \quad 13d_0 = 1,092 \quad d_0 = 0,084 \text{ et } t_0 = \frac{0,084}{12} = 0,007\text{h} = 25,2\text{s}$$

VII. Soit V la capacité du bassin. V est la somme de V_1 et V_2 , V_1 étant la quantité d'eau versée par la première fontaine, V_2 le volume d'eau versé par la seconde fontaine. Le débit s'exprime sous la forme $d = \frac{\text{Volume}}{\text{temps}}$, V étant le volume versé en un temps donné t . D'où $d_1 = \frac{V}{9}$ et $d_2 = \frac{V}{7}$.

a. Puisque la première fontaine remplit le bassin en 9 heures, durant la première heure elle verse $\frac{1}{9}V$.

De même la seconde fontaine verse en une heure $\frac{1}{7}V$. Le débit de chacune étant constant, il y a proportionnalité entre le temps écoulé et le volume d'eau versé par chacune.

Soit x le nombre d'heures nécessaires au remplissage du bassin :

$$\frac{1}{9}V \times x + \frac{1}{7}V \times x = V \text{ soit } \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{7}\right) \times x = 1 \quad \text{d'où } x = \frac{1}{\frac{16}{63}} = \frac{63}{16} = 3,9375\text{h} = 3\text{h}56\text{min}15\text{s}$$

b. Lors du remplissage simultané avec les deux fontaines, la quantité d'eau recueillie au total est de 550 litres, soit $V_1 + V_2 = 550$. On peut alors trouver la capacité du bassin

$$\frac{V}{9} \times 4 + \frac{V}{7} \times 3 = 550 \quad \frac{28V + 27V}{63} = 550 \quad \frac{55V}{63} = 550 \quad V = 630\text{l}$$

Le débit de chaque fontaine est égal à $d_1 = \frac{V}{9} = \frac{630}{9} = 70\text{l.h}^{-1}$ et $d_2 = \frac{V}{7} = \frac{630}{7} = 90\text{l.h}^{-1}$

VIII. Les minéraux secondaires représentent $100 - (28+53+11) = 8\%$ du bloc de granit. Or leur volume est égal à $19,2 \text{ dm}^3$. Si on note V le volume total du bloc, on a donc $\frac{19,2}{V} = \frac{8}{100}$, soit $V = \frac{1920}{8} = 240 \text{ dm}^3$.
Le volume du bloc est égal à $0,24 \text{ m}^3$. Sa masse est donc égale à $0,24 \times 2,6 = 0,624$ tonnes, soit 624 kg .

Pour s'exercer²

Exercice 1

- a. La densité du minerai A est le quotient de la masse par le volume soit $d_A = \frac{11}{2,5} = 4,4 \text{ kg/dm}^3$
- b. On veut fabriquer un mélange de ces deux minerais pour obtenir un minerai C dont la densité soit égale à 7. Cela signifie que $d_C = \frac{M_C}{V_C} = 7$, avec M_C la somme des masses des minerais A et B, et V_C la somme des volumes des minerais A et B. On sait que $d_B = \frac{M_B}{V_B}$; donc le minerai B a une masse de $M_B = d_B \times V_B = 8 \times V_B$. On connaît $M_A = 11$ et $V_A = 2,5$.

On peut donc en déduire que $d_C = \frac{M_A + M_B}{V_A + V_B} = \frac{11 + 8 \times V_B}{2,5 + V_B} = 7$.

$$\text{soit } 11 + 8 \times V_B = 7 \times (2,5 + V_B) \quad 11 + 8V_B = 17,5 + 7V_B \quad 8V_B - 7V_B = 17,5 - 11 \quad V_B = 6,5$$

$$\text{avec } M_B = d_B \times V_B = 8 \times V_B \quad M_B = 8 \times V_B = 8 \times 6,5 = 52$$

On devra donc utiliser 52 kg de minerai B avec 11 kg de minerai A.

- c. Avec seulement $6,6 \text{ kg}$ de minerai A, $M_A = 6,6 \text{ kg}$ et $V_A = \frac{M_A}{d_A} = \frac{6,6}{4,4} = 1,5 \text{ dm}^3$

$$6,6 + 8V_B = 7 \times (1,5 + V_B) \quad 6,6 + 8V_B = 10,5 + 7V_B \quad \text{soit } V_B = 3,9 \quad \text{et } M_B = 8 \times 3,9 = 31,2 \text{ kg}$$

On devra alors utiliser $31,2 \text{ kg}$ de minerai B avec $6,6 \text{ kg}$ de minerai A.

Exercice 2

Les six réservoirs sont de formes différentes, de même volume 10 litres, de même hauteur et se remplissent dans le même temps. Les graduations des six jauges A, B, C... indiquent les hauteurs de liquide correspondant à 1 litre, 2 litres... pour les six réservoirs. Les courbes 1, 2, 3... indiquent la hauteur atteinte par le liquide en fonction du temps lorsque les six réservoirs se remplissent. Pendant le remplissage, le débit de l'eau est constant et identique d'un récipient à l'autre. Ainsi à un instant donné, le volume d'eau contenu dans chaque récipient est le même mais la hauteur n'est pas nécessairement la même.

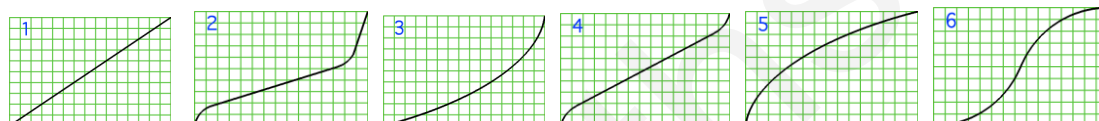


² Amiens 2003- 2006 groupe 5 - 2008 groupe 5 - 2006 groupe 1 - Lyon 2005

1. Compte tenu de la forme des récipients on peut remarquer que seul le récipient R_2 a une forme 'régulière', où un volume proportionnel à la hauteur. Seule la jauge C et la courbe 1 présentent cette régularité. Le récipient R_1 ne présente pas de symétrie dans sa forme globale, on peut donc lui associer la jauge E et la courbe 2, les seuls répondant à ces caractéristiques.

Les récipients R_3 et R_6 présentent une certaine 'symétrie', l'un semblant être le 'retournement' de l'autre. Les deux jauges correspondantes peuvent donc être D et F, les courbes associées 3 et 5. La hauteur de remplissage sera inférieure au départ dans le récipient R_6 , on peut donc lui associer la jauge D et la courbe 3. Enfin les récipients R_4 et R_5 présentent chacun une symétrie horizontale que l'on retrouve sur les jauges A et B, ainsi que sur les courbes 4 et 6. Au départ la hauteur de remplissage sera plus grande dans R_4 , on lui associe donc la jauge A et la courbe 4.

récipient	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
jauge	E	C	F	A	B	D
courbe	2	1	5	4	6	3



2. Le volume de ce récipient cylindrique est de 10 litres, soit 10 dm^3 . Son diamètre étant de 16cm, son rayon mesure 8cm, soit 0,8dm.

$$V = \pi \times r^2 \times h, \text{ d'où } h = \frac{10}{\pi \times 0,8^2} \approx 4,97 \text{ dm soit environ } 50 \text{ cm.}$$

3. Le volume du cylindre étant proportionnel à sa hauteur, le volume d'eau contenu à cet instant t, sera

$$V' = \frac{2}{3} \times V = \frac{2}{3} \times 10 \approx 6,7 \text{ l}$$

4. On a vu à la question 1, que la courbe 1 est associée au récipient R_2 , et la courbe 3 au récipient R_6 . Dans le cylindre, la hauteur d'eau est proportionnelle au temps de remplissage. Il s'agit donc de comparer les deux hauteurs à l'instant t, correspondant au volume V' pour le récipient R_2 . On constate que la hauteur est inférieure dans R_6 , à celle de R_2 . Elle l'est d'ailleurs tout le temps du remplissage.



Exercice 3

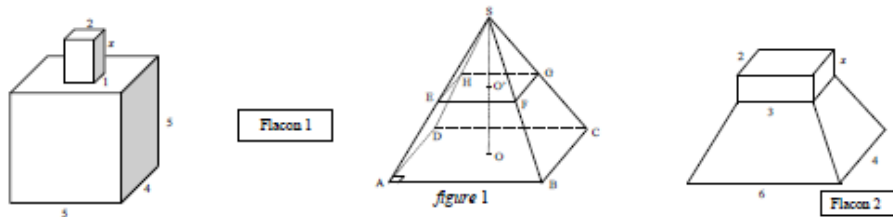
L'unité de longueur est le centimètre.

Le flacon (1) est constitué de deux pavés droits. Le pavé droit supérieur a pour dimensions 1, 2, x, x désignant la mesure de la hauteur. Le pavé inférieur a pour dimensions 5, 4 et 5.

Dans le flacon 2, la base a pour dimensions 6 et 4, le pavé supérieur a pour dimensions 2, 3 et x , x étant la hauteur. On donne aussi $SO = 11\text{cm}$; $SO' = 5,5\text{cm}$; $AB = 6\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$; $EF = 3\text{cm}$; $FG = 2\text{cm}$.

1. Le volume $V_1(x)$ du flacon 1 est la somme des volumes des deux pavés qui le constituent.

$$V_1(x) = 5 \times 4 \times 5 + 1 \times 2 \times x = 2x + 100$$

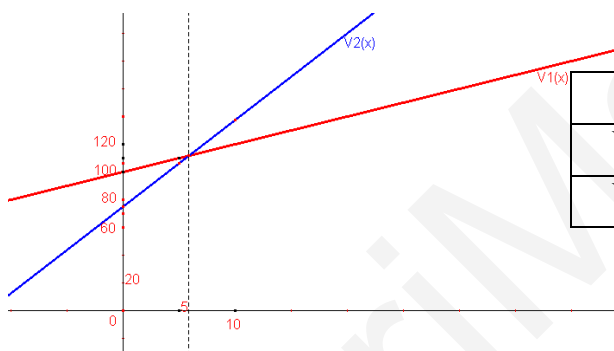


2. Le volume V_2 est la somme du volume du pavé supérieur et du volume de la pyramide tronquée qui constitue la base du flacon 2. Le volume V' de cette pyramide tronquée s'obtient en enlevant le volume de la petite pyramide SEFGH à celui de la pyramide initiale SABCD.

$$V' = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times SO - \frac{1}{3} \times EF \times FG \times SO' = \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times 11 - \frac{1}{3} \times 3 \times 2 \times 5,5 = 88 - 11 = 77$$

$$V_2(x) = 2 \times 3 \times x + V' = 6x + 77$$

3. a. V_1 et V_2 sont deux fonctions affines. Leurs représentations graphiques sont donc deux droites définies par les points dont les coordonnées sont dans le tableau ci-dessous :



x	0	5	10
$V_1(x)$	100	110	120
$V_2(x)$	77	107	137

Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente une longueur de 1cm. Sur l'axe des ordonnées, un millimètre représente un volume de 1cm^3 .

b. $V_1(x) = V_2(x) \quad 2x + 100 = 6x + 77 \quad 4x = 23 \quad x = \frac{23}{4} = 5,75 \text{ cm}$

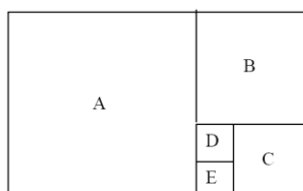
Les deux flacons ont le même volume pour une hauteur x égale à 5,75cm.

c. On trouve alors $V_1(x) = V_2(x) = 2 \times 5,75 + 100 = 111,5\text{cm}^3$

$$1\text{dm}^3 = 1\text{l} \quad 1\text{cm}^3 = 1\text{ml}$$

$$\text{d'où } V_1(x) = V_2(x) = 111,5\text{ml} = 11,15\text{cl}$$

Exercice 4



$$1. d = e = \frac{c}{2} \text{ et } b = c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2} \quad a = b + c = \frac{3c}{2} + c = \frac{5c}{2}$$

$$2. \text{L'aire du rectangle est égale à } A_{\text{rectangle}} = (a+b)(b+c) = \left(\frac{5c}{2} + \frac{3c}{2}\right)\left(\frac{3c}{2} + c\right) = 4c \times \frac{5c}{2} = 10c^2$$

Et représente une feuille de papier de 3610cm^2 . D'où $10c^2 = 3610 \quad c^2 = 361 \quad c = 19\text{cm}$

La feuille a alors pour dimensions $4c = 76\text{cm}$ et $\frac{5c}{2} = 47,5\text{cm}$

3. La feuille étant homogène, la masse des différentes pièces constituant cette feuille est proportionnelle à l'aire des pièces.

	A	B
Aire (cm^2)	$a^2 = \frac{25c^2}{4}$	$b^2 = \frac{9c^2}{4}$
Masse(g)	x	100

Puisqu'il y a proportionnalité, les produits en croix sont donc égaux :

$$x \times \frac{9c^2}{4} = 100 \times \frac{25c^2}{4} \quad x = 100 \times \frac{25c^2}{4} \times \frac{4}{9c^2} = \frac{2500}{9} \approx 277,8\text{g}$$

On peut aussi remarquer que $A_A = \frac{25}{9} \times A_B$ donc $M_A = \frac{25}{9} \times M_B = \frac{25}{9} \times 100$

$$4. \text{On sait que } a = \frac{5c}{2}; \text{ on peut en déduire que } V_A = \frac{125c^3}{8} = \frac{125}{8} V_C \quad V_C = \frac{8}{125} \times 2 = 0,128\text{m}^3 = 128\text{dm}^3.$$

Exercice 5

1. Soient M_s la masse de la statue : $M_s = 340\text{g}$ et M_v la masse du vase vide : $M_v = 500\text{g}$. Soit M'_v la masse du vase rempli d'eau : $M'_v = M_v + M_{\text{eau}} = 2300$. Le vase peut donc contenir 1800g d'eau soit $1,8\text{litre}$.

La masse du vase plein et de la statue avant immersion est donc $M'_v + M_s = 2640\text{g}$. Au moment de l'immersion de la statue, l'eau déborde. Le vase pèse alors 2600g . Il y a donc 40g d'eau déversée qui représente le volume occupé par la statue immergée. La masse volumique de l'eau étant 1g/cm^3 , le volume de la statue est 40cm^3 .

2. La masse volumique de la statue est le quotient de sa masse par son volume.

$$\mu_{\text{statue}} = \frac{M_s}{V_s} = \frac{340}{40} = 8,5\text{g/cm}^3.$$

Première méthode : Pour exprimer cette masse volumique en kg/litre , on peut utiliser la proportionnalité liant masse et volume : une masse volumique de $8,5\text{g/cm}^3$ signifie que $8,5\text{g}$ de ce métal occupe 1cm^3 , donc $8,5\text{kg}$ de ce métal occupe 1000fois plus de volume soit 1000cm^3 , qui est égal à 1dm^3 , soit 1litre . On trouve donc une masse volumique de $8,5\text{kg/l}$.

Seconde méthode : On peut aussi exprimer la masse en kilogramme et le volume en dm^3 ($1\text{dm}^3 = 1\text{litre}$).

$$\mu_{\text{statue}} = \frac{M_s}{V_s} = \frac{340}{40} = \frac{0,340}{0,040} = 8,5\text{kg/l}.$$

3. $M_v + M_{liq} = 500 + M_{liq} = 1940g$ donc la masse du liquide est de 1440g. On a vu précédemment que le vase peut contenir 1800g d'eau soit 1,8litre. Le volume de liquide est donc de 1,8litre.

On en déduit sa masse volumique $\mu_{liquide} = \frac{1440}{1800} = 0,8g/cm^3$.