S22C Autour des ISOMETRIES et autres TRANSFORMATIONS

Mise en route

A. A vous de les découvrir…

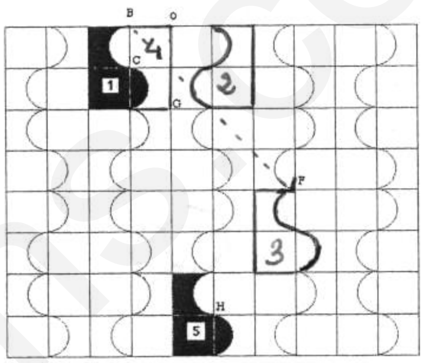
L'image du triangle 1 par la symétrie axiale d'axe (xy) est le triangle 3.

L'image du triangle 1 par la symétrie centrale de centre A est le triangle 5.

L'image du triangle 1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ est le triangle 2.

Le triangle 1 a pour image le triangle 4 par la rotation de centre A et d'angle 90° (sens direct indiqué par la flèche).

B. A vous de retrouver les images…



Le motif 2 est l'image du motif 1 dans la symétrie d'axe (OG).

Le motif 3 est l'image du motif 1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BF}$.

Le motif 4 l'image du motif 1 dans la symétrie centrale de centre C.

Le motif 5 est l'image du motif 1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CH}$.

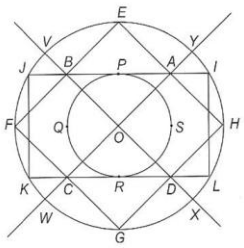
C. A vous de les reconnaître[1] …

	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Eléments de symétrie de la figure	Translation	Rotation
Triangle isocèle	non	Oui	1axe : la médiatrice de la base		
Rectangle	Oui	Oui	2 axes : les médiatrices des côtés *Les diagonales du rectangle ne sont pas axes de symétrie*		Oui (180°)
Cercle	Oui	Oui	Infinité d'axes : tous les diamètres		Oui
Losange	Oui	Oui	2 axes : les diagonales		Oui
Triangle équilatéral	non	Oui	3 axes : les médiatrices des côtés		Oui (120°)
Parallélogramme	Oui		*Le point d'intersection des diagonales est centre de symétrie*		Oui (180°)
Carré	Oui	Oui	4 axes : les médiatrices des côtés et les diagonales		Oui (90°)

[1] *(Source : Axiale – Mathématiques Seconde – Hatier2004)*

b. P est intrus ! En effet $PI = JP$ et $JP \neq FO$. On remarque par ailleurs que $FO = QS$ car $R = 2r$

Transformations	Symétrie centrale de centre O				Symétrie d'axe (vx)				Translation de vecteur $\overrightarrow{FO}$				Rotation de centre O, d'angle 90°			
Points	A	X	Q	J	F	O	C	Y	F	O	Q	**P**	E	D	B	O
Images	C	V	S	L	E	O	A	W	O	H	S		F	A	C	O



D. A vous de les construire… La figure de départ P est en bleu.

I. P_1 est la figure symétrique de la figure P par rapport au point O (en rose)

P_2 est la figure symétrique de la figure P par rapport à la droite (EF) (en vert)

P_3 est la translaté de la figure P par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (en violet)

P_4 est la transformée de P dans la rotation de centre E, d'angle 90°, dans le sens direct (en orange).

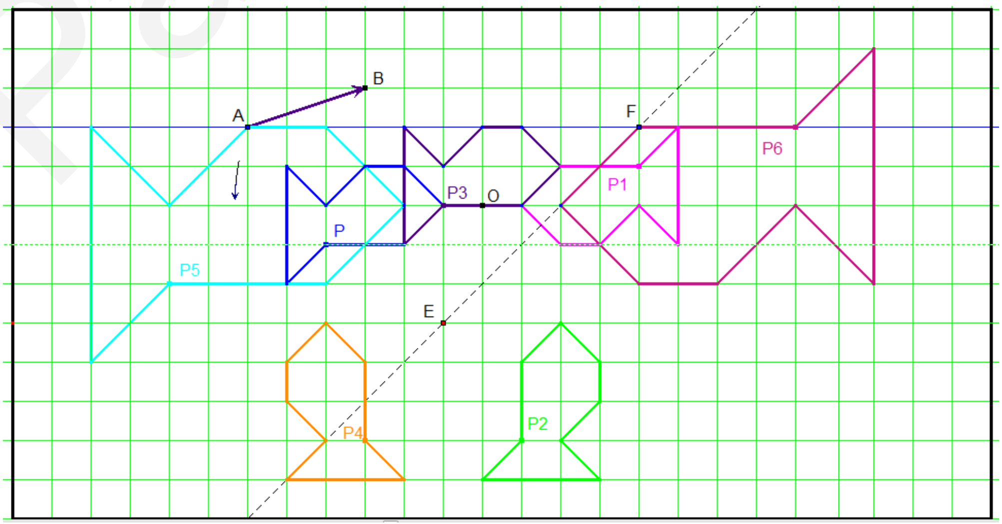
Pour construire P_4, choisir un point M de la figure P, un sommet caractéristique par exemple, et construire M' tel que $EM = EM'$ (le point M' est sur le cercle de centre E de rayon EM) et $\widehat{MEM'} =$ 90° dans le sens indiqué. Construire ensuite la figure à partir de ce point.

P_5 est l'image de la figure P dans l'homothétie de centre O et de rapport 2 (en turquoise).

P_6 est l'image de la figure P dans l'homothétie de centre O de rapport -2 (en prune).

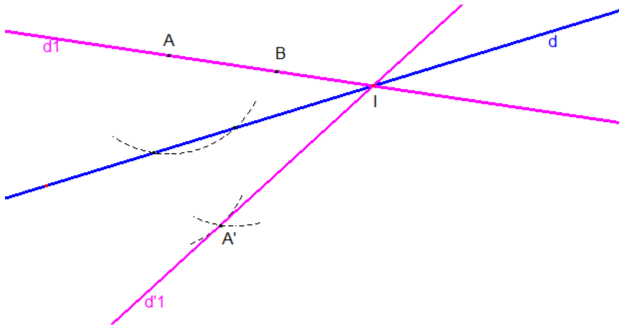
Seules les homothéties de rapport 2 et -2 ne sont pas des isométries, puisqu'elles agrandissent la figure.

Pour construire l'image d'un point M de la figure par l'homothétie, se rappeler que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$



E. A vos instruments…..

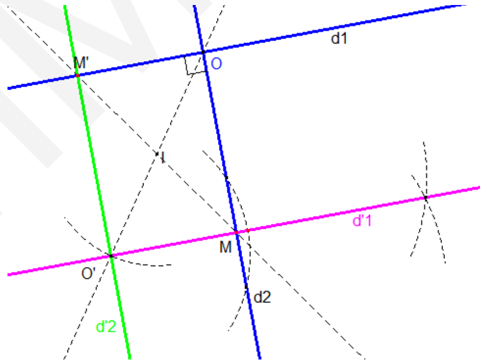
a. Après avoir construit le point A' symétrique du point A au compas, il suffit de tracer la droite (AB). Elle coupe la droite (d) au point I. La droite (d'_1), symétrique de la droite (AB) par rapport à (d), passe par les points symétriques de A et de I par rapport à (d). C'est donc la droite (A'I), I étant invariant dans la symétrie puisqu'il est sur l'axe.



b. Le point O' étant le symétrique de O par rapport à I, I est le milieu de [OO']. Pour trouver le point O', on trace la droite (IO). L'arc de cercle de centre I de rayon IO la coupe en O'.

· La droite symétrique de la droite (d_1) par rapport au point I est la droite parallèle à (d_1) passant par O'. C'est donc la droite (d'_1) perpendiculaire à (d_2) passant par O'. La figure montre sa construction au compas.

· Soit M le point d'intersection de (d'_1) et de (d_2). La droite (d_2) passant par les points O et M, la droite (d'_2), symétrique de la droite (d_2) par rapport au point I, passe par le point O' et par le point M', symétrique de M par rapport à I. Le point M étant sur (d'_1), droite symétrique de (d_1), le point M' est le point d'intersection de (d_1) avec la droite (MI).



c. L'image du parallélogramme ABCD dans la symétrie de centre A est le parallélogramme AB'C'D'(en rose) : le point A est invariant, il est le milieu des segments [BB'], [CC'], [DD'].

Le parallélogramme ABCD est invariant dans la symétrie de centre O (en bleu).

La symétrie axiale étant une isométrie, l'image du parallélogramme ABCD dans la symétrie d'axe (AB) est le parallélogramme ABC_1D_1 (en vert). A et B étant sur l'axe, ils sont invariants.

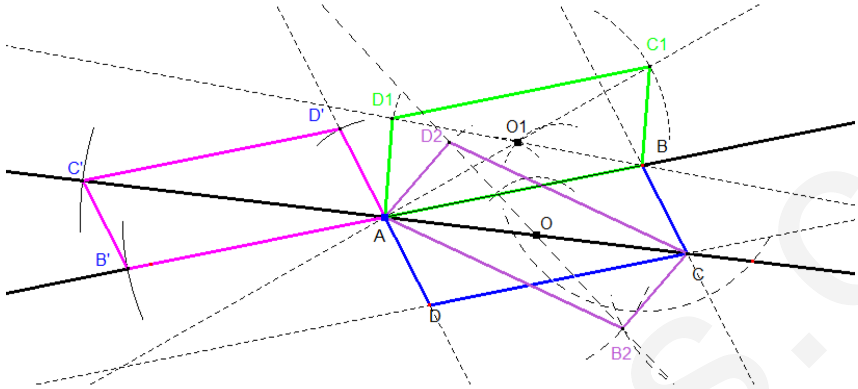
Une construction peut se faire en construisant son centre O_1 :

- Construire le symétrique O_1 du point O par rapport à la droite (AB) (voir tracés sur la figure).
- Tracer les droites (AO_1) et (BO_1).
- Tracer un cercle de centre O_1 passant par A. Il coupe (AO_1) en C_1.

- Tracer un cercle de centre O_1 passant par B. Il coupe (BO_1) en D_1.

De même, l'image du parallélogramme ABCD dans la symétrie d'axe (AC) est le parallélogramme AB_2CD_2 (en violet) :

- Les points A et C sont invariants.
- Le point B_2 est le symétrique du point B par rapport à (AC).
- Le point D_2 est sur la droite (OB_2). O est le milieu de $[B_2D_2]$.

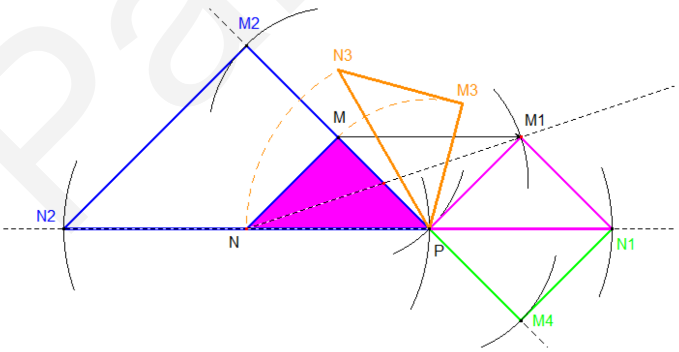


d. Soit MNP un triangle rectangle isocèle en M.

- La rotation étant une isométrie, l'image du triangle MNP est donc un triangle M_3N_3P superposable au triangle MNP. Le point P est invariant. Les points M_3 et N_3 sont tels que $PM = PM_3$, $PN = PN_3$ $\widehat{MPM3} = 60°$ et $\widehat{NPN3} = 60°$ dans le sens indirect (en orange)
- La translation de vecteur $\overrightarrow{NP}$ étant aussi une isométrie, l'image du triangle MNP est donc un triangle M_1PN_1 superposable au triangle MNP (en rose). L'image du point N est P.

  $\overrightarrow{PN_1} = \overrightarrow{NP}$: Le point N_1 est donc sur la droite (NP), avec P milieu de $[NN_1]$.

  $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NP}$: Le point M_1 est le quatrième sommet du parallélogramme $MNPM_1$



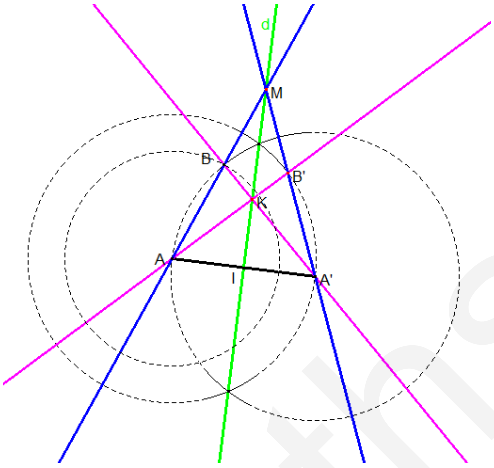
- L'homothétie de centre P de rapport $k = 2$ est un agrandissement du triangle MNP.

  P est invariant, M_2 est l'image de M : $\overrightarrow{PM_2} = 2 \times \overrightarrow{PM}$ donc les points P, M, M_2 sont alignés, N_2 est l'image de N : $\overrightarrow{PN_2} = 2 \times \overrightarrow{PN}$ donc les points P, N, N_2 sont alignés.

· L’homothétie de centre P de rapport $k' = -1$ est en fait une symétrie centrale de centre P. L’image du triangle MNP est le triangle M_4N_1P superposable au triangle MNP : P est invariant, M_4 est le symétrique de M par rapport à P, N_1 est le symétrique de N par rapport à P.
Seule l’homothétie de rapport 2 n’est pas une isométrie.

Pour s’exercer[2]

Exercice 1



1. $AA' = 4cm$; $AB = 3cm$; $A'B = 4cm$. La droite (*d*), en vert, est la médiatrice de [AA’]. Le point B est à l’intersection du cercle de centre A’ passant par A (rayon 4*cm*) et du cercle de centre A de rayon 3*cm*.

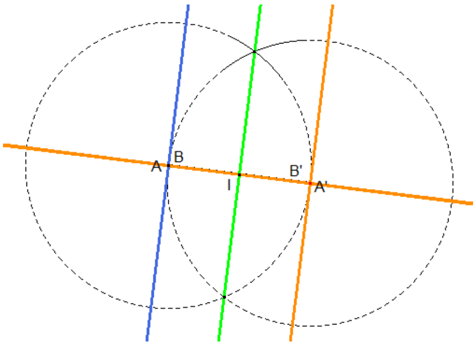
2. Le point B est le point d’intersection de la droite (AB) et de la droite (A’B). Son symétrique B’ par rapport à (*d*) est donc le point d’intersection de la droite symétrique de (AB) et de la droite symétrique de (A’B). La droite (AB) coupe (d) en M, qui est invariant dans la symétrie. La droite symétrique de (AB) est donc la droite (A’M). La droite (A’B) coupe la droite (*d*) en K, invariant dans la symétrie. La droite symétrique de (A’B) est donc la droite (AK). Le point B’ est le point d’intersection de (A’M) et de (AK).

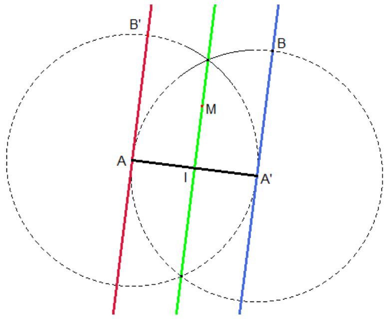
3. Cette dernière construction est possible si les points K, M et B’ existent.

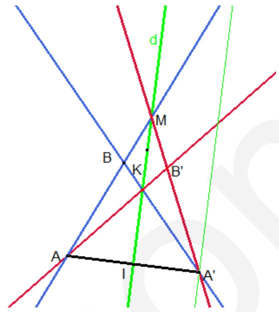
- Le point M existe toujours compte tenu des dimensions du triangle AA’B. En effet si (AB) était parallèle à (*d*), (AB) serait perpendiculaire à (AA’) car (*d*) est elle-même perpendiculaire à (AA’), le triangle AA’B ne pouvant être rectangle en A car $A'A = A'B = 4cm$, A et B seraient confondus, ce qui est contraire aux hypothèses.
- De même le point K existe toujours. En effet, si (A’B) était parallèle à (*d*), le point B serait dans le demi plan déterminé par (*d*) contenant A’. Dans ce cas, le triangle AA’B peut avoir pour dimensions $A'A = A'B = 4cm$, mais, compte tenu du régionnement du plan par la médiatrice de [AA’], on aurait $AB > 4cm$.

[2]1. Nancy 2001copirelem- 2. Limoges 2001copirelem- 3. Orléans 2003- 4. Aix Marseille 2006

· Enfin les droites (A’M) et (AK) sont toujours sécantes car leurs symétriques (AM) et (A’K) sont sécantes en B, compte tenu de l’inégalité triangulaire qui justifie l’existence du triangle AA’B.

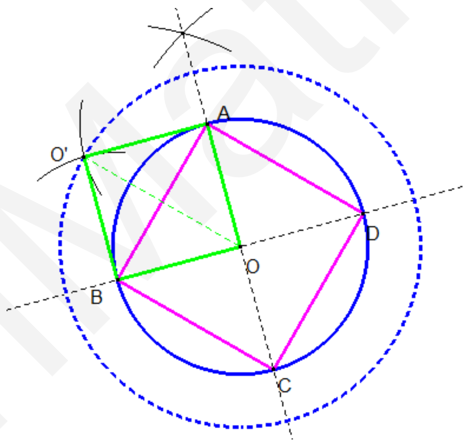






Exercice 2

1. a. Tracer le cercle de centre O et une droite passant par O. Elle coupe le cercle en deux points B et D. La médiatrice de [BD] coupe le cercle en deux points A et C. ABCD est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu O. De plus ses diagonales [AC] et [BD] sont deux diamètres perpendiculaires, elles sont donc aussi de même longueur. ABCD est donc un carré.



b. L’aire du carré ABCD est égale à quatre fois l’aire du triangle AOB.

$A_{AOB} = \frac{1}{2} \times AO \times OB = \frac{1}{2} r \times r = \frac{r^2}{2}$. On en déduit que $A_{ABCD} = 4 \times \frac{r^2}{2} = 2r^2$. L’aire du carré ABCD est aussi égale à AB^2, d’où $AB = r\sqrt{2}$.

2. O étant le centre de la rotation et le centre du carré, les points A et B se déplacent sur le cercle C dans cette rotation. Le point O’ étant le symétrique de O par rapport à [AB], $AO = AO'$ et $BO = BO'$. Comme d’autre part $AO = BO$, le quadrilatère AOBO’ a quatre côtés de même longueur, c’est donc un losange. De plus compte tenu de la symétrie, [OO’] et [AB] sont perpendiculaires. On en déduit que AOBO’ est un carré et ses diagonales sont de même longueur, d’où $OO' = AB = r\sqrt{2}$. Le point O’ se déplace donc sur le cercle de centre O de rayon $r\sqrt{2}$.

3. a. Tracer le cercle de centre O, placer un point A sur le cercle. Tracer le cercle de centre A passant par O, il recoupe le cercle C en A''. Tracer le cercle de centre A'' passant par O, il recoupe le cercle C en B. En continuant ainsi, on obtient le point B'', puis C, puis C''. En joignant successivement les points A, A'', B, B'', C, C'', on obtient un hexagone régulier ; en joignant A, B, C on obtient le triangle équilatéral ABC. En effet les angles au centre $\widehat{AOC}, \widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent des arcs de même longueur, ils sont égaux et mesurent 120°. Les angles inscrits interceptant respectivement les mêmes arcs, c'est-à-dire AC, AB, BC sont donc aussi égaux et ont une mesure égale à la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc, soit 60°. Le triangle ABC est donc bien équilatéral.

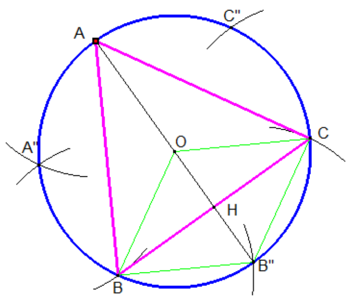


fig. a

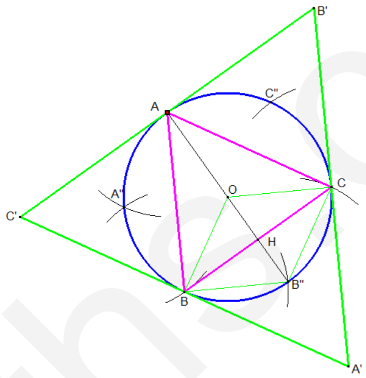


fig. b

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc [AH] est la médiatrice issue de A et perpendiculaire à [BC]. Elle est aussi hauteur et l'aire du triangle ABC vaut $A_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$

[AH] est aussi axe de symétrie de la figure et coupe le cercle en B''. Les points O et B'' étant sur la médiatrice de [BC], on a alors $OB = OC$ *et* $B''B = B''C$.

Le triangle ABB'' est inscrit dans un demi cercle d'hypoténuse [AB''], il est donc rectangle et sa médiane a pour mesure la moitié de l'hypoténuse, d'où $OB = OB''$. Le triangle OBB'' est isocèle avec $\widehat{BOB''} = 60°$ par construction. C'est donc un triangle équilatéral et $OB = BB''$. Le quadrilatère OBB''C est donc un losange, ses diagonales sont alors perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

On en déduit que $OH = \frac{1}{2} OB'' = \frac{1}{2} OA$ et que $AH = AO + OH = AO + \frac{1}{2} AO = \frac{3}{2} AO = \frac{3}{2} r$

Dans le triangle rectangle AHC, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AH^2 + HC^2$

H est le milieu de [BC] donc $HC = \frac{BC}{2}$. Comme le triangle ABC est équilatéral $AC = BC$.

On en déduit que $BC^2 = AH^2 + \frac{BC^2}{4}$, soit $BC^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{3 \times BC^2}{4} = AH^2$.

Comme $AH^2 = \frac{9}{4} r^2$, on a l'égalité $\frac{3}{4} BC^2 = \frac{9}{4} r^2$, soit $BC^2 = \frac{4}{3} \times \frac{9}{4} r^2 = 3r^2$ *donc* $BC = r\sqrt{3}$

L'aire du triangle ABC vaut $A_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} r \times r\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$

b. Le point A' étant le symétrique de A par rapport à (BC), le triangle A'BC est le triangle symétrique du triangle ABC dans cette symétrie, il est donc aussi équilatéral, d'où les égalités $A'B = A'C = BC$. De même dans les symétries par rapport à [AC] et par rapport à [AB], les deux triangles B'AC et C'AB sont équilatéraux, d'où $B'A = B'C = AC$ et $C'A = C'B = AB$.

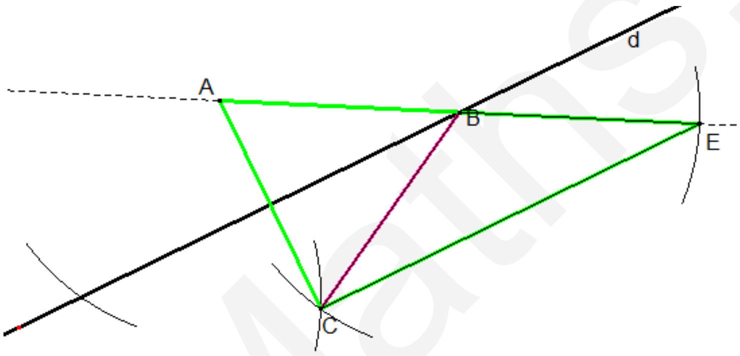
On en déduit d'une part que $A'B = A'C = B'A = B'C = C'A = C'B = AB = BC = AC$, d'autre part que les angles $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{A'CB'}$, $\widehat{C'BA'}$ mesurent $3 \times 60°$, soit 180°. Les points B', A, C' sont donc alignés ainsi que A', C, B' d'une part et B', A, C' d'autre part.

On peut donc en conclure que le triangle A'B'C' est équilatéral et que A, B, C sont respectivement les milieux de [B'C'], de [A'C'], et de [A'B'].

Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont alors les médiatrices et les bissectrices du triangle A'B'C'.

Le point O est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

Exercice 3



1. Si la droite (*d*) est axe de symétrie du triangle ABC, le point B qui est sur cette droite, est invariant dans la symétrie d'axe (*d*), et le point C est le symétrique de A par rapport à (*d*).

Pour construire le point C, tracer un arc de cercle de centre A de rayon r, qui coupe la droite (*d*) en deux points (par exemple B), puis tracer deux arcs de cercle de rayon r, successivement centrés en chacun de ces deux points. Ces deux arcs se coupent au point C.

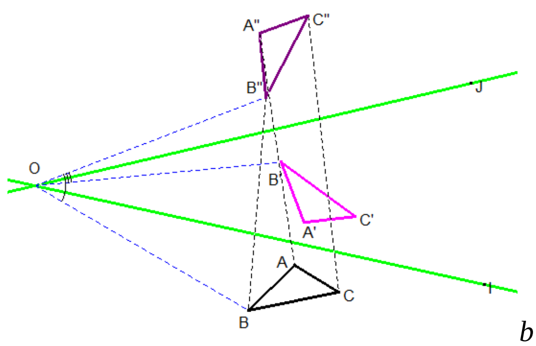
2. Le point E étant le symétrique du point A par rapport à B, B est le milieu de [AE] et $AB = BE$.

3. Puisque le triangle ABC a pour axe de symétrie la droite (*d*), il est isocèle et $AB = BC$. D'après la construction du point E, $AB = BE$, d'où $AB = BC = BE$. La médiane issue de C du triangle ACE est égale à la moitié du côté opposé [AE], c'est donc un triangle rectangle d'hypoténuse [AE].

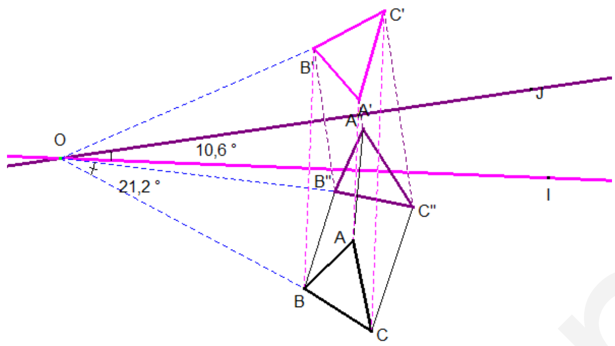
4. On peut en déduire que le triangle BEC est isocèle puisque $BC = BE$.

Exercice 4

On se place dans le cas de la figure *a*, proposée dans l'énoncé. La fig. *a* ci-dessous ne fait pas apparaître la construction au compas ; celle-ci a déjà été décrite précédemment. Il faudrait laisser apparent les traits de constructions.



a.



b.

2. En observant la figure obtenue on peut remarquer que les droites (AA’’), (BB’’) et (CC’’) ne sont pas parallèles. Or s’il y avait une symétrie axiale, elles seraient toutes trois perpendiculaires à l’axe de symétrie.

3. Sur la figure *a*, L’angle $\widehat{BOB''}$ peut se décomposer en$\widehat{BOB'} + \widehat{B'OB''}$. Par la symétrie d’axe (OI), l’angle $\widehat{BOB'}$est le double de l’angle $\widehat{BOI}$, égal à $\widehat{IOB'}$. Par la symétrie d’axe (OJ), l’angle $\widehat{B'OB''}$est le double de l’angle$\widehat{B'OJ}$. Donc l’angle $\widehat{BOB''}$est le double de l’angle$\widehat{IOJ}$, somme de $\widehat{IOB'}$ et$\widehat{B'OJ}$.

On démontrerait de même que $\widehat{AOA''} = 2 \times \widehat{IOJ}$ et que $\widehat{COC''} = 2 \times \widehat{IOJ}$.

4. Par les deux symétries successives d’axes (*OI*) et (OJ), on obtient les égalités de longueurs $OB = OB' = OB''$, de même que $OA = OA' = OA''$ et $OC = OC' = OC''$.

Le triangle A’’B’’C’’ est donc le transformé du triangle ABC dans une rotation de centre O d’angle $2 \times \widehat{IOJ}$, de sens direct.

Remarque

Propriété : la transformation composée de deux symétries axiales d’axes sécants en un point O est une rotation de centre O dont l’angle est le double de l’angle formé par les deux axes. Cette propriété vient d’être démontrée dans le cas de la *figure a* qui est celle proposée dans l’énoncé. On peut remarquer que selon la position du triangle initial par rapport aux deux droites sécantes, les triangles obtenus par symétrie changent de position par rapport aux deux droites. Un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser la conjecture de la propriété précédente (figure *b*) quelque soit cette position. La démonstration se fait sur le même principe que la précédente, il faut seulement être vigilent dans la décomposition des angles qui peut être soustractive au lieu d’être additive. *Elle pourrait se faire aussi avec les angles ‘orientés’ pour ceux qui les connaissent*.

Exercice 5

1. Construction avec une équerre non graduée (fig.1):

Tracer le segment [AB].

Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par B, elle coupe le cercle en C.

Tracer la perpendiculaire à [BC] passant par C, elle coupe le cercle en D.

Tracer [AC] et [BD]. Ces deux segments se coupent en O.

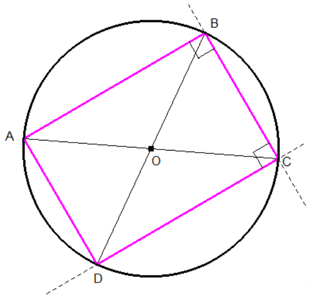


fig.1

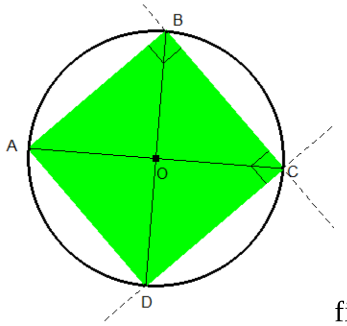


fig.4

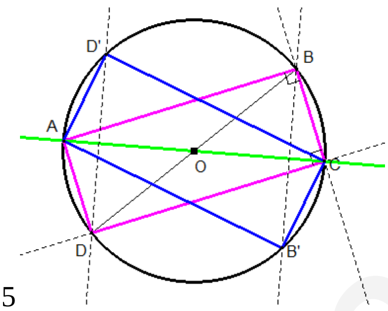


fig.5

2. Les trois points A, B, C sont sur le cercle (*C*). Le cercle (*C*) est donc le cercle circonscrit au triangle ABC. Par construction ce triangle est rectangle, d'hypoténuse [AC]. Le point O, centre du cercle circonscrit est donc le milieu de l'hypoténuse [AC]. D'autre part, les points B, C et D étant sur le cercle (C), celui-ci est aussi le cercle circonscrit au triangle BCD. Le triangle BCD étant rectangle par construction, le centre de son cercle circonscrit est aussi le milieu de son hypoténuse [BD]. Le point O est donc le point d'intersection de [AC] et de [BD].

3. O étant le centre du cercle, les segments [AC] et [BD], diagonales du quadrilatère ABCD, sont deux diamètres. Ils ont donc le même milieu et sont de même longueur. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme et plus particulièrement un rectangle.

4. Si le quadrilatère ABCD est un carré, on peut dire que les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires et de même longueur, d'où $OA = OB = OC = OD = 5cm$. De plus les côtés ont même longueur, d'où $AB = BC = CD = DA$. On sait aussi que $AC = BD = 10cm$.

a. Le triangle ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $10^2 = 2AB^2$ d'où $AB^2 = 50$ $\quad AB = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1cm$

b. L'aire de la partie du disque extérieure au carré ABCD est la différence entre l'aire du disque et l'aire du carré : $A_{disque} - A_{carré} = \pi r^2 - (5\sqrt{2})^2 = 25\pi - 50 \approx 28{,}54cm^2$

5. Le rectangle ABCD est inscrit dans le cercle de diamètre [AC]. Dans la symétrie d'axe (AC), les points A, O et C de l'axe sont invariants, et le cercle (*C*) est globalement invariant, c'est à dire que chaque point du cercle se transforme en un point du cercle. Les points B et D, situés sur le cercle, ont donc respectivement pour symétriques les points B' et D' situés sur le cercle, tels que (AC) soit la médiatrice de [BB'] et de [DD']. On sait d'autre part que la symétrie axiale est une isométrie, la figure image du rectangle ABCD est donc un rectangle superposable AB'CD' de centre O.