S4C. Autour du CALCUL LITTERAL Corrigé

Mise en route

L'analyse préalable du calcul est indispensable dans le calcul littéral

1. Voici plusieurs développements de l'expression E = $5(x+3)-3(x+4)$

Elève A : 5x + $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ 3x $\boxed{+}$ 12 = ~~8x + 15~~ erreur dans la multiplication de 5 par 3, puis dans les signes

Elève B : 5x + 15 $\boxed{+}$ 3x – 12 = ~~8x~~ + 3 erreur de signe en multipliant -3 par x

Elève C : 5x + 15 – 3x – 12 = 2x + 3 juste

Elève D : 5x $\boxed{+ 3}$ - 3x $\boxed{- 12}$ = 2x ~~+ 15~~ erreur dans la multiplication de 5 par 3, erreur d'addition

2. Soit $d = 30vt + \frac{v^2}{2}$. Compte tenu des indications d'unités dans la formule, on peut remplacer directement : $d = 30vt + \frac{v^2}{2} = 30 \times 90 \times 0,5 + \frac{90^2}{2} = 5400cm = 54m$. **Attention, la formule n'est valable qu'avec les unités indiquées dans l'énoncé.**

3. À propos de « a² + b² »

1. $\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{2} = \frac{2a^2+2b^2}{2} = \frac{2(a^2+b^2)}{2} = a^2+b^2$

Pour démontrer qu'une égalité est vérifiée, on peut soit partir du premier membre, le transformer pour arriver au deuxième membre, soit calculer séparément les deux membres et conclure.

2. La figure est formée de deux carrés de côtés *a* et *b*, son aire est égale à a^2+b^2 . Les dimensions données 18 et 11 correspondent respectivement à *a+b* et à *a-b*.

$$A = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2} = \frac{18^2+11^2}{2} = 222{,}5\text{cm}^2$$

Pour s'exercer[1]

Exercice 1. Application d'une formule

a. Le tonneau

$$V = \frac{\pi \times h\,(2D^2+d^2)}{12} = \pi \times h\,(2D^2+d^2) \times \frac{1}{12} = \pi \times 80 \times (2 \times D^2 + 50^2) \times \frac{1}{12}$$

Il faut veiller à la correspondance des unités (cm et cm^3) $V = 225l = 225dm^3 = 225000cm^3$

[1] Ex3 : G5 2007 ; ex6 : Aix 2001 ; ex7 : Dijon 2003 ; ex.8 : Créteil 2000

$\pi \times 80 \times (2D^2+50^2) \times \frac{1}{12} = 225000$ $\pi \times 80 \times (2D^2+50^2) = 225000 \times 12 = 2700000$

$2D^2 = \frac{2700000}{\pi \times 80} - 2500 = 8242,95$ $D \approx 64,2cm$

b. Le verre à moitié plein

L'expression « remplir à moitié » demande une précision : moitié de la hauteur (usuel) ou moitié du volume. La question posée amène donc à comparer les deux quantités :

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 2,5^2 \times 10 \approx 65,4cm^3$

Le verre rempli à moitié du volume contiendra environ $32,7cm^3$.

Le verre rempli à moitié de la hauteur est représenté par un petit cône de hauteur 5cm, mais dont le rayon est lui aussi réduit de moitié (*cf* théorème de Thalès dans l'espace). Il contiendra donc :

$V' = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 1,25^2 \times 5 \approx 8,2cm^3$

On peut aussi appliquer la propriété suivante obtenue à partir du théorème de Thalès :

« Dans le cas d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k (ici $k=\frac{1}{2}$), les aires sont transformées dans le rapport k^2 et les volumes dans le rapport k^3 ; ici $V' = (\frac{1}{2})^3 V = \frac{1}{8}V \approx 65,4 \div 8 \approx 8,2cm^3$

A vous de conclure sur ce que vous pouvez demander quand on vous remplit votre verre « à moitié » !

Exercice 2. Application de la distributivité (Développement et réduction)

$A = 4(x-5) = 4x-20$

$B = 2x(x+7) = 2x^2+14x$

$C = 5+(2x-7) = 5+2x-7 = 2x-2$

$D = 5-(2x-7) = 5-2x+7 = 12-2x$

$E = 2x(x+1)-x(2-x^2) = 2x^2+2x-2x+x^3 = x^3+2x^2$

$F = 5(2x-7)-2x(x+5) = 10x-35-2x^2-10x = -35-2x^2$

$G = (x+3)(x+2) = x^2+5x+6$

$H = (5-x)(x-6) = 5x-30-x^2+6x = -x^2+11x-30$

$I = (2x-1)(x-5) = 2x^2-10x-x+5 = 2x^2-11x+5$

$J = 8(3+x)(x-2) = 8(3x-6+x^2-2x) = 8(x^2+x-6) = 8x^2+8x-48$

$K = (2x+1)(x+3)+(3x-1)(2x-5) = 2x^2+6x+x+3+6x^2-15x-2x+5 = 8x^2-10x+8$

$L = (x+5)(3-x)-(2x-4)(x+1) = 3x-x^2+15-5x-(2x^2+2x-4x-4) = 3x-x^2+15-5x-2x^2-2x+4x+4 = -3x^2+19$

Exercice 3 **Ecriture et valeur d'un nombre, moyenne**

$S = 257 + 275 + 572 + 527 + 752 + 725 = 3108$ $\quad M = \dfrac{257 + 275 + 572 + 527 + 752 + 725}{6} = \dfrac{3108}{6} = 518$

$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$

$= a \times 10^2 + c \times 10 + b + b \times 10^2 + a \times 10 + c + b \times 10^2 + c \times 10 + a + a \times 10^2 + b \times 10 + c + c \times 10^2 + a \times 10 + b + c \times 10^2 + b \times 10 + a$

$= 222 \times (a + b + c)$ $\quad M = \dfrac{222(a + b + c)}{6} = 37(a + b + c)$

3. $M = 37(a + b + c) = 370$ d'où $a + b + c = 10$

On peut donc choisir trois chiffres dont la somme est égale à 10 :

a	b	c	
1	2	7	127, 172, 217, 271, 21, 712
1	3	6	136, 163, 316, 361, 631, 613
1	4	5	145, 154, 415, 451, 541, 514
2	3	5	235, 253, 325, 352, 523, 532

Exercice 4. **Application de la distributivité (Factorisation)**

$A = 9a^2 + 3a = 3a(3a + 1)$

$B = 5(b + 2) + 3b(b + 2) = (b + 2)(5 + 3b)$

$C = x(1 - x) - 3(x - 1) = x(1 - x) + 3(1 - x) = (1 - x)(x + 3)$

$D = (x - 1)(x + 3) + (x - 5)(x - 1) = (x - 1)(x + 3 + x - 5) = (x - 1)(2x - 2)$

$E = (x + 2)^2 + 3x + 6 = (x + 2)^2 + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 5)$

$F = (3x - 4)(x + 5) - (2x + 1)(3x - 4) = (3x - 4)(x + 5 - 2x - 1) = (3x - 4)(-x + 4)$

$G = (x + 1)^2 + (x + 1)(x + 3) = (x + 1)(x + 1 + x + 3) = (x + 1)(2x + 4)$

$H = 5(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 1) = (2x + 1)(5(2x + 1) + (x - 1)) = (2x + 1)(11x + 4)$

$I = 3(x + 1)(x - 4) - (x - 4)^2 = (x - 4)(3(x + 1) - (x - 4)) = (x - 4)(3x + 3 - x + 4) = (x - 4)(2x + 7)$

$J = 4x^2 - 2x(x + 5) = (2x)^2 - 2x(x + 5) = 2x(2x - x - 5) = 2x(x - 5)$

Exercice 5. **Avec les identités remarquables**

Développer et réduire

$A = (5x - 1)(5x + 1) = 25x^2 - 1$

$B = (2x + 5)^2 + (2x - 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25 + 4x^2 - 20x + 25 = 8x^2 + 50$

$C = (2x + 5y)(2x - 5y) = 4x^2 - 25y^2$

$D = (3x + 1)(x + 2) + (x + 2)(x - 2) = 3x^2 + 6x + x + 2 + x^2 - 4 = 4x^2 + 7x - 2$

$E = (2x + 7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$

$F = (7x - 3)^2 = 49x^2 - 42x + 9$

$G = (3x - 7)^2 - (3x + 7)^2 = 9x^2 - 42x + 49 - (9x^2 + 42x + 49) = 9x^2 - 42x + 49 - 9x^2 - 42x - 49 = -84x$

$H = (2x + 5)^2 + 3x(2x - 5) = 4x^2 + 20x + 25 + 6x^2 - 15x = 10x^2 + 5x + 25$

Factoriser

$I = 64x^2 - 169 = (8x)^2 - 13^2 = (8x-13)(8x+13)$

$J = 49x^2 - 42x + 9 = 3^2 - 2\times 21x + (7x)^2 = (7x-3)^2$

$K = (2x+7)^2 - 16 = (2x+7)^2 - 4^2 = (2x+7-4)(2x+7+4) = (2x+3)(2x+11)$

$L = 25 - 20x + 4x^2 = 5^2 - 2\times 10x + (2x)^2 = (2x-5)^2$

$M = (x-8)^2 - 25 = (x-8-5)(x-8+5) = (x-13)(x-3)$

$N = 9x^2 + 48x + 64 = (3x)^2 + 2\times 24x + 8^2 = (3x+8)^2$

$O = 36x^2 - (x+1)^2 = (6x+x+1)(6x-x-1) = (7x+1)(5x-1)$

$P = (2x+5)^2 - (2x-5)^2 = (2x+5+2x-5)(2x+5-2x+5) = (4x)(10) = 40x$

Exercice 6 Identités remarquables, démonstration d'une propriété vraie, contre exemple

1. **Proposition A**

Cette proposition est vraie car le chiffre des unités du produit de deux nombres est égal au chiffre des unités du produit des chiffres des unités de ces nombres. Si le chiffre des unités de n est 2, le chiffre des unités de n^2 est égal au chiffre des unités de 2 x 2, c'est-à-dire à 4.

On pouvait aussi démontrer directement ce résultat en écrivant n sous la forme

$n = 10d + 2$ (d désigne le nombre de dizaines de n)

On a alors : $n^2 = (10d+2)^2 = 100d^2 + 40d + 4 = 10(10d^2 + 4d) + 4$ Le chiffre des unités de n^2 est 4.

Proposition B

Cette proposition n'est pas vraie, il suffit de trouver un contre-exemple : l'écriture de 14 se termine par 4 mais l'écriture du carré de 14 (196) ne se termine pas par 16.

2. a) Dans l'écriture du nombre $\overline{a5}$, la plus grande valeur possible de a est 9, donc $n \leq 95$ *d'où* $n^2 \leq 9025$ et n^2 s'écrit avec au plus 4 chiffres.

b) $n = 10a + 5$

D' où : $n^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2+a) + 25$

Dans la division euclidienne de n^2 par 100, le reste est 25 (25<100) et le quotient est a^2+a

$a^2 + a = a\times(a+1)$

n^2 se termine par 25 et le nombre de centaines de n^2 est $a\times(a+1)$.

Exercice 7 Généralisation algébrique, identité remarquable

$65^2 = 4225$ et $6\times 7\times 100 + 25 = 4225$

On remarque que : $145^2 = 21025$ et $14\times 15\times 100 + 25 = 21025$

$1275^2 = 1625625$ et $127\times 128\times 100 + 25 = 1625625$

a. Généralisation : Soit a un entier supérieur ou égal à 1, dans les exemples donnés, a vaut successivement 6, 14, 127). On a alors : $a\times(a+1)\times100+25=(\overline{a5})^2$

b. Vérifions cette relation dans deux exemples :

$705^2=497025=70\times71\times100+25$ et $85^2=7225=8\times9\times100+25$

Démonstration de la relation : si a représente le nombre de dizaines du nombre N choisi

$N=(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100\times\left(a^2+a\right)+25=a\times(a+1)\times100+25$

On a bien $(\overline{a5})^2=a\times(a+1)\times100+25$

Exercice 8 Identité remarquable, contre exemple, condition nécessaire et suffisante

Soit N un nombre entier naturel, u son chiffre des unités dans son écriture en base 10, et d le nombre de dizaines de N : $N=10\,d+u$

On peut alors écrire

$N^2=(10d+u)^2=100d^2+20d\times u+u^2=10\times(10d^2+2du)+u^2$. Le chiffre des unités de N^2 est donc celui de u^2.

On cherche alors quelles sont les valeurs possibles pour le chiffre des unités du carré d'un entier naturel compris entre 0 et 9 :

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u^2	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**

Ainsi, si A est le carré d'un nombre entier naturel, son chiffre des unités est nécessairement 0, 1, 4, 5, 6 ou 9. Cette condition n'est pas suffisante, car par exemple 14 n'est pas le carré d'un entier naturel.

b. On reprend $N=10\,d+u$.

$N(N+1)=(10d+u)(10d+u+1)=100d^2+10du+10d+10du+u^2+u=10\left(10d^2+2du+d\right)+u^2+u$. Le chiffre des unités de $N(N+1)$ est donc celui de u^2+u.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u^2+u	**0**	**2**	**6**	**12**	**20**	**30**	**42**	**56**	**72**	**90**

Ainsi, si A est le produit de deux entiers consécutifs, son chiffre des unités est nécessairement 0, 2 ou 6. Cette condition n'est pas suffisante, car par exemple 22 n'est pas le produit de deux entiers naturels consécutifs.