S6C Autour de la RESOLUTION DE PROBLEME Corrigé

Mise en route

A. a. FAUX : Soit x le (les) nombre(s) cherché(s) ; son successeur s'écrit $x+1$ et le carré de son successeur s'écrit $(x+1)^2$. Les données nous permettent d'écrire l'équation $(x+1)^2=25$ que l'on peut résoudre. Ainsi :

$(x+1)^2-25=0 \quad (x+1)^2-5^2=0 \quad (x+1+5)(x+1-5)=0 \quad (x+6)(x-4)=0$

Soit $x+6=0$, soit $x-4=0$. On trouve donc deux nombres solutions $x=4$ et $x=-6$.

Ce nombre n'est donc pas obligatoirement 4, ce peut être -6. Le passage par une résolution algébrique permet de trouver cette seconde valeur à laquelle nous n'aurions pas spontanément pensé.

b. FAUX : Soit x le prix de la baguette et y le prix du pain rond. Les données nous permettent d'écrire l'équation à deux inconnues $4x+3y=10$. Une équation à deux inconnues admet comme solutions les couples (x, y) pour lesquels l'égalité est vérifiée. On peut donc voir ici que le couple (1, 2) est solution puisque $4\times1+3\times2=10$. Cependant l'égalité est aussi vérifiée avec le couple (1,15 ; 1,80) car $4\times1{,}15+3\times1{,}80=10$

Le prix de la baguette n'est donc pas obligatoirement 1€ et celui du pain 2€. *Penser que le contre exemple proposé doit être cohérent avec le contexte de l'énoncé….*

B. a. Stéphane a 11 ans et son père a 40 ans. On cherche dans combien d'années l'âge du père sera le double de l'âge de Stéphane. **Il faut bien penser que les deux personnes vieillissent en même temps de x années.**

$\boxed{2(11+x)=40+x}$ soit $22+2x=40+x$, soit $x=18$

On peut vérifier que dans 18 ans, Stéphane aura 29ans et que son père aura 58ans.

b. Une mère a 24 ans de plus que sa fille. Soit x l'âge de la fille.

La mère a alors $x+24$, d'où l'équation $x+x+24=100 \quad 2x+24=100 \quad 2x=76 \quad x=38$

La fille a 38 ans, la mère a 62 ans.

C. On peut donner **deux types de résolution, soit algébrique, soit arithmétique (sans mise en équation).**

Résolution algébrique : Soit L la longueur, la largeur vaut $\frac{3}{4}L$

$L+l=280 \quad \frac{3}{4}L+L=280 \quad \frac{7}{4}L=280 \quad L=280\times\frac{4}{7}=160 \quad l=34\times160=120$

La longueur mesure 160m et la largeur mesure 120m.

Résolution arithmétique **:** La longueur représente quatre quarts et la largeur trois quarts « de la longueur ».

Le périmètre représente donc quatorze quarts de la longueur. Chaque quart mesure donc 560 :14 soit 40m.

Les dimensions du champ sont donc 160m pour la longueur et 120m pour la largeur.

D. Le zoo

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

Le prix payé par les adultes est donc de 5x et celui payé par les enfants est 3y, soit au total $5x+3y=2370$

D'autre part $x+y=630$.

Le système $\begin{cases}5x+3y=2370\\ x+y=630\end{cases}$ peut se résoudre par substitution en remplaçant x par $630-y$ dans la première équation. On obtient le nouveau système :

$\begin{cases}5(630-y)+3y=2370\\ x=630-y\end{cases}$ $\begin{cases}2y=780\\ x=630-y\end{cases}$ $\begin{cases}y=390\\ x=240\end{cases}$

Il y a donc 240 visiteurs adultes et 390 visiteurs enfants.

On peut aussi résoudre ce problème avec une équation à une inconnue :

Soit n le nombre d'enfants ; le nombre d'adultes est alors $630-n$

La recette apportée par les enfants est de $3n$, celle apportée par les adultes est $5(630-n)$

La recette totale s'écrit : $5(630-n)+3n=2370$ $2n=2370-3150$ $2n=780$ $n=390$

Il y a eu 390 enfants et 240 adultes

Pour s'exercer[1]

Exercice 1:

Soit n le nombre effectif de participants.

Le coût total de cette sortie peut s'exprimer sous la forme : $65\,n=60(n+1)$

Soit $65n=60n+60$ $5n = 60$ $n=12$. Il y avait donc 12 participants.

Exercice 2

On note S la somme totale.

Le premier joueur prend $\frac{S}{2}-1500$; le deuxième $\frac{S}{4}$; le troisième $\frac{S}{3}-500$; le quatrième $\frac{S}{5}+300$.

Comme ceci est un partage, S vérifie donc l'équation : $S=\frac{S}{2}-1500+\frac{S}{4}+\frac{S}{3}-500+\frac{S}{5}+300$.

On a donc $S=\frac{30S+15S+20S+12S}{60}-1700$, soit $\frac{77S}{60}-S=1700$, soit $\frac{17S}{60}=1700$, soit $S = 6000$.

La somme totale est donc égale à 6000€.

[1] 2. Nancy 2002 ; 6. G2 2006 ; 7. Créteil 2005 ; 8.La Réunion 2002 ; 9.Grenoble 2002 ; 12 : Martinique 2004

Le premier joueur reçoit $3000 - 1500 = 1500$€, le deuxième $\frac{6000}{4} = 1500$€, le troisième $\frac{6000}{3} - 500 = 1500$ €, et le quatrième $\frac{6000}{5} + 300 = 1500$€. Le partage est donc équitable.

Exercice 3

Soit *x* le poids du vélo, le poids du cycliste est alors *x + 60*, et ensemble $x + x + 60 = 82$

D'où $2x + 60 = 82 \quad 2x = 22 \quad x = 11$. Le vélo pèse 11kg et le cycliste 71kg.

Exercice 4

Dans une famille, la somme des âges des 4 enfants, Damien, Hélène, Sophie et Sylvain, est 34 ans. Damien est l'aîné, Hélène a 2 ans de moins, Sophie a 3ans de moins qu'Hélène, et Sylvain 2 ans de moins que Sophie.

Il faut choisir l'âge d'un enfant (*x*) et exprimer tous les autres en fonction de *x*.

Soit *x* l'âge de Damien ; l'âge d'Hélène est *x – 2*, l'âge de Sophie est *x – 5*, et celui de Sylvain *x – 7*.

On a alors $x + x - 2 + x - 5 + x - 7 = 34$

D'où $4x - 14 = 34 \quad 4x = 48 \quad x = 12$

Damien a 12 ans, Hélène a 10 ans, Sophie a 7 ans, et Sylvain a 5 ans. ($12 + 10 + 7 + 5 = 34$)

Exercice 5

Soient h la hauteur de la table, L la longueur du bloc et l la largeur du bloc. On peut écrire : $L + h - l = 32$ et $l + h - L = 28$. En ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient $2h = 60$ soit $h = 30$.

La hauteur de la table est donc de 30 pouces.

Exercice 6

1. Puisque le triangle ABC est rectangle en A (hypoténuse BC), on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 12{,}5^2 - 3{,}5^2 = 144$, d'où $AB = \sqrt{144} = 12$ (AB est une longueur donc positive)

2. $\begin{cases} a + b = 36 \\ a - b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 36 - a \\ 2a = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 36 - a \\ a = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 16 \\ a = 20 \end{cases}$

Les deux nombres cherchés sont donc 20 et 16.

3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 36 \times 4 = 144$ et $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144} = 12$

Si l'on nomme les trois côtés du triangle rectangle a, b, c, le théorème de Pythagore précédemment énoncé s'écrit $a^2 = b^2 + c^2$ *avec* $a = BC, b = AC, c = AB$. On constate alors que si *c* est égal à 12, c^2 est égal à 144. On peut en déduire que *a* et *b* vérifient $a + b = 36$ *et* $a - b = 4$; d'où d'après la résolution du système $a = 20$ *et* $b = 16$. Le triangle a donc pour dimensions 20, 16, 12.

4. a. On peut *naturellement* faire des décompositions en produits de facteurs à partir de 144, pour obtenir la décomposition en facteurs premiers :

$144 = 2 \times 72 = 2 \times 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 2 \times 18 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$

On peut décomposer 144 en un produit de deux facteurs en prenant successivement simultanément 'un ou deux ou trois ou quatre' facteurs 2, et 'un ou deux' facteurs 3.

$144 = 1\times 144 = 2\times 72 = 3\times 48 = 2^2\times 36 = 2\times 3\times 24 = 2^3\times 18 = 3^2\times 8 = 2^2\times 3\times 12 = 2^4\times 9$

$144 = 1\times 144 = 2\times 72 = 3\times 48 = 4\times 36 = 6\times 24 = 8\times 18 = 9\times 16 = 12\times 12$.

Ces produits, compte tenu de la commutativité peuvent tous se permuter.

b. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Ils font donc chercher les couples $(a,\ b)$ dont la somme *s* et la différence *d* vérifient $s\times d = 144$ à partir des décompositions obtenues.

En résolvant le système $\begin{cases} a+b=s \\ a-b=d \end{cases}$ par addition puis soustraction par exemple, on obtient $\begin{cases} 2a=s+d \\ 2b=s-d \end{cases}$

On trouve alors les solutions : $a=\dfrac{s+d}{2}$ *et* $b=\dfrac{s-d}{2}$

Il suffit donc de regarder les différentes valeurs possibles pour *s* et *d*, sachant que *a* et *b* sont des entiers positifs non nuls.

s	144	72	48	36	24	18	16	12	9
d	1	2	3	4	6	8	9	12	8
a	Non entier	37	Non entier	20	15	13	Non entier	nul	Non entier
b	Non entier	35	Non entier	16	9	5	Non entier	nul	Non entier

Les solutions sont donc :(37,35) ; (20,26) ; (15,9) ; (13,5).

Exercice 7

Soit *r* le nombre de refus et *b* le nombre de barres tombées.

$\begin{cases} 2r+3b=18 \\ 1r+4b=19 \end{cases}$ $\begin{cases} 2(19-4b)+3b=18 \\ r=19-4b \end{cases}$ $\begin{cases} 38-5b=18 \\ r=19-4b \end{cases}$

$\begin{cases} 2r+3b=18 \\ r=19-4b \end{cases}$ $\begin{cases} 38-8b+3b=18 \\ r=19-4b \end{cases}$ $\begin{cases} b=4 \\ r=3 \end{cases}$

Un refus coûte donc 3 points et une barre 4 points.

Exercice 8

Soit *n* le nombre de pièces de 50 cents et *m* le nombre de pièces de 20 cents.

On a le système suivant $\begin{cases} n+m=13 \\ 50n+20m=500 \end{cases}$.

En divisant par 10 la deuxième équation et en multipliant par 2 la première on obtient $\begin{cases} 2n+2m=26 \\ 5n+2m=50 \end{cases}$.

Par soustraction, on obtient l'équation $3n=24$ *soit* $n=8$.

En reportant dans la première : $n+m=13 \Leftrightarrow m=13-8=5$

Le système initial est équivalent à : $\begin{cases} n=8 \\ m=5 \end{cases}$. Il a donc 8 pièces de 50 cents et 5 pièces de 20 cents.

Exercice 9

Soit a le nombre de billets de 10€, b le nombre de billets de 50€, c le nombre de billets de 100€ et d de 500€.

On a alors le système suivant : $\begin{cases} 15000 = 10a + 50b + 100c + 500d \\ b = 10a \\ d = 2c \end{cases}$

En remplaçant b et d dans la première équation on obtient $15000 = 10a + 500a + 100c + 1000c = 510a + 1100c$ c'est à dire : $1500=51a+110c$

Nous avons deux inconnues et une seule équation, il faut donc chercher des nombres entiers positifs qui vérifient cette équation. Il faut que a soit un multiple de 10, sinon c ne sera pas entier :

Si a=10, c= $\dfrac{1500\text{-}510}{110}$ ce qui donne c = 9. Si a= 20, c n'est pas entier donc ne convient pas. Si a= 30 ou plus, $51a$ dépasse 1500 donc ce n'est pas possible. La seule solution pour a est donc 10, ce qui donne $b = 100,\ c = 9\ et\ d = 18$.

On a donc 10 billets de 10€, 100 billets 50€, 9 billets de 100€ et 18 billets de 500€.

Exercice 10

Résolution algébrique:

Soit x le nombre de pauvres et y le nombre de sols, en donnant 4 sols à chacun il manque 2 sols ; le nombre total de sols est donc un multiple de 4 moins 2. De même en donnant 3 sols à chacun, il reste 5 sols, la somme totale est donc un multiple de 3 plus 5. D'où le système : $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5 = y \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4x = y + 2 \\ 3x = y - 5 \end{cases}$

En multipliant par 3 l'équation (1) et par 4 l'équation (2) on obtient : $\begin{cases} 12x = 3y + 6 \\ 12x = 4y - 20 \end{cases}$

D'où $3y + 6 = 4y - 20 \qquad y = 26 \qquad 4x = 26 + 2 \qquad x = 7$

Il y a donc 7 pauvres et la personne avait 26 sols. Vérification : $3 \times 7 = 26 - 5\ et\ 4 \times 7 = 26 + 2$

La résolution algébrique peut aussi se faire en résolvant l'équation $4x - 2 = 3x + 5$. La résolution de cette équation permet de trouver $x = 7$.

Résolution arithmétique :

Si le reste après partage de la somme en 3, est 5, c'est que la somme possédée est un 'multiple de 3' plus 5, qui s'écrit sous la forme *3k+5*.

Si le manque après partage en 4, est 2 c'est que la somme est un 'multiple de 4' moins 3, qui s'écrit sous la forme *4k'-2*.

Nombre de pauvres	2	3	4	5	6	**7**
3k+5	11	14	17	20	23	**26**
4k'-2	6	10	14	18	22	**26**

Il y a donc 7 pauvres et la personne avait 26 sols.

Exercice 11

Soit x le *bénéfice* lors de la vente du bouquet au prix normal et y celui lors de la vente du bouquet durant le week-end. Alors le bénéfice de la première semaine vaut $177 = 65x + 18y$ et le bénéfice de la seconde semaine vaut $144 = 52x + 12y$. D'où :

$$\begin{cases} 177 = 65x + 18y \\ 36 = 13x + 3y \end{cases} \textit{soit} \begin{cases} 177 = 65x + 18y \\ 216 = 78x + 18y \end{cases} \textit{soit} \begin{cases} 39 = 13x \\ 216 = 78x + 18y \end{cases} \textit{soit} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

La fleuriste gagne 3 euros par bouquet la semaine et perd 1euro par bouquet le week-end.

Exercice 12

1. Au camping Beausoleil : $50 + 10 \times 15 \times 3 + 10 \times 10 \times 2 = 700$. Au camping Bellevue : $20 \times 7 \times 4 + 15 \times 4 \times 3 = 740$. La famille Lelong doit donc camper au camping Beausoleil.

2. On note a_1 et a_2 les âges respectifs des deux enfants (a_1 désignant l'âge de l'aîné), et on calcule le prix du séjour en fonction de a_1 et a_2, en prenant en compte les deux valeurs qui interviennent dans le changement de tarifs, à savoir 5ans et 15ans.

Cas possibles	$a_1 \geq 15$ $a_2 \geq 15$	$a_1 \geq 15$ $5 \leq a_2 < 15$	$a_1 \geq 15$ $a_2 < 5$	$5 \leq a_1 < 15$ $5 \leq a_2 < 15$	$5 \leq a_1 < 15$ $a_2 < 5$	$a_1 < 5$ $a_2 < 5$
Beausoleil	**890€**	**820€**	820€	**750€**	750€	750€
Bellevue	980€	980€	**735€**	980€	**735€**	**490€**

Dans chacun des cas, est indiqué en gras le camping le plus économique.

Exercice 13

a. *Résolution arithmétique* : On peut faire le schéma suivant, en représentant la durée de la troisième émission par $\overbrace{\xleftrightarrow{?.\text{min}}}^{\textit{émission}3}$, la durée de la première émission est le double, celle de la seconde émission dure 12 minutes de plus : $\underbrace{\overbrace{\xleftrightarrow{?.\text{min}}\xleftrightarrow{?.\text{min}}}^{\textit{émission}1}\overbrace{\xleftrightarrow{?.\text{min}}\xleftrightarrow{12\,\text{min}}}^{\textit{émission}2}\overbrace{\xleftrightarrow{?.\text{min}}}^{\textit{émission}3}}_{180\,\text{min}}$

La durée totale moins les 12 min représente donc quatre fois la durée de l'émission 3. Cette durée vaut donc $(180 - 12) : 4 = 168 : 4 = 42\,\text{min}$. L'émission 3 dure 42 minutes, l'émission 2 dure 54 minutes, l'émission 1 dure 84 minutes.

b. *Résolution algébrique* : On note d la durée de la 3$^{\text{ème}}$ émission. La durée de la 1$^{\text{ère}}$ émission est alors égale à 2d, tandis que la durée de la 2$^{\text{ère}}$ émission est égale à d+12. La durée totale est alors égale à $2\,d + (d + 12) + d = 4\,d + 12$. Or on sait que la durée totale est de 180 minutes.

On a donc $4\,d + 12 = 180$, *soit* $4\,d = 168$, *soit* $d = 42$. La durée de la 3$^{\text{ème}}$ émission est donc 42 minutes, la durée de la 2$^{\text{ème}}$ émission est $42 + 12 = 54$ minutes, et la durée de la 1$^{\text{ère}}$ émission est $2 \times 42 = 84$ minutes.

Exercice 14

Si l'on considère le terrain de gauche, par rapport à la configuration initiale, il a perdu une surface rectangulaire de taille $(23 - x)\times 8$, et une surface rectangulaire de taille $(16 - x)\times 18$, mais il a gagné une surface rectangulaire de taille $14 \times x$. Comme les aires totales ne sont pas modifiées, x vérifie l'équation suivante $(23 - x)\times 8 + (16 - x)\times 18 = 14 \times x$ *soit* $4x = 472$ *et* $x = 11{,}8m$.