S1. Autour de la NUMERATION DECIMALE

Mise en route

Tous les nombres considérés dans ces questions sont écrits dans la numération décimale.

***A.* On recherche un premier nombre.** Voici ce qu'on sait de lui :

- son chiffre des unités est égal à 5
- il a 431 centaines
- son chiffre des dizaines est égal à 2.

Quel peut être ce nombre ?

B. On recherche un deuxième nombre. Voici ce qu'on sait de lui :

- il est compris entre 15 000 et 16 000
- tous ses chiffres sont différents
- son chiffre des centaines est un multiple de 3
- son chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5
- son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines.

Quel peut être ce nombre ? Donner toutes les possibilités.

C. On recherche un nombre N à trois chiffres.

En permutant, dans l'écriture de N, le chiffre des dizaines et celui des unités, on obtient l'écriture d'un nombre M. En permutant, dans l'écriture de N, le chiffre des dizaines et celui des centaines, on obtient l'écriture d'un nombre P. Les nombres M et P restent des nombres à trois chiffres.

Déterminer tous les nombres N qui vérifient **simultanément** les relations : N + 36 = M et N - 270 = P.

Pour s'exercer[1]

Toute réponse sera justifiée

Exercice 1

1. Existe-t-il un entier naturel à deux chiffres qui soit égal au double de la somme de ses chiffres ?

2. Existe-t-il un entier naturel à deux chiffres qui soit égal à la somme de ses chiffres ?

Exercice 2

Déterminer tous les nombres de trois chiffres $\overline{abc}$ non multiples de dix qui vérifient les conditions suivantes : Le chiffre des dizaines est quadruple de celui des unités et en retranchant à ce nombre 297, on obtient le nombre écrit à l'envers.

Exercice 3

1. Un nombre s'écrivant avec trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à 2 chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines. Trouver ce nombre.

[1] 1. D'après Rouen 97, 2. Toulouse 1998, 3. D'après Aix 1999, 4. Nice 2008, 5. Bordeaux 2001, 6. Amiens 2002, 7. Lyon 2005

2. Un nombre à trois chiffres est 26 fois plus grand que le nombre à 2 chiffres formé en enlevant le chiffre des centaines. Trouvez ce nombre. Combien existe-t-il de solutions ?

Exercice 4

On cherche tous les nombres entiers naturels de cinq chiffres vérifiant les deux conditions suivantes :

- leur écriture décimale n'utilise que deux chiffres différents
- la somme de leurs cinq chiffres est égale à 11.

1. Les chiffres 1 et 3 permettent d'écrire de tels nombres : en donner la liste complète.

2. Trouver toutes les autres paires de chiffres possibles pour écrire les nombres cherchés.

3. Combien y a-t-il de nombres entiers de cinq chiffres vérifiant les deux conditions?

Exercice 5

Un nombre de trois chiffres est tel que :

- la différence entre ce nombre et le nombre retourné est 297,
- la somme des trois chiffres est 11,
- la somme du triple du chiffre des centaines et du double du chiffre des dizaines est 22.

Trouver ce nombre. (Indication : si, par exemple, le nombre était 231 le nombre retourné serait de 132).

Exercice 6

Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre entier naturel écrit en base dix pour lequel $m > c > d > u > 0$.

1. Quel est le plus petit nombre N possible ?

2. Quel est le plus grand nombre N possible ?

3. Dressez la liste des nombres N pour lesquels le chiffre des milliers est 6.

4. On appelle N' le nombre entier obtenu à partir de N en permutant le chiffre des unités avec celui des unités de mille, et le chiffre des centaines avec celui des dizaines. On appelle D le nombre obtenu en faisant la différence N-N'. Exprimez D en fonction de m, c, d et u.

5. Montrez que D est un multiple de 9.

6. Quelle est la valeur maximum de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N le nombre D est-il maximum ?

7. Quelle est la valeur minimum de D ? Pour quelle(s) valeur(s) de N le nombre D est-il minimum ?

Exercice 7

1. Combien y a t-il de nombres entiers naturels à 2 chiffres? à 3 chiffres? à 4 chiffres?

2. Parmi les nombres entiers naturels à 3 chiffres :

> **a.** Combien y en a-t-il qui ont 3 chiffres identiques ?
>
> **b.** Combien y en a-t-il qui ont 3 chiffres différents ?
>
> **c.** Combien y en a-t-il qui ont exactement 2 chiffres différents, l'un des deux étant répété deux fois ?
>
> **d.** Vrai ou faux : parmi les nombres à 3 chiffres, il y en a 28% qui ont au moins un chiffre répété ?

☞ **A retenir**

On se place ici dans l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;......\}$.

Un nombre entier naturel peut être vu sous deux aspects :

- cardinal, c'est à dire le nombre d'éléments d'un ensemble fini.
- ordinal, c'est à dire faisant partie d'un ensemble ordonné IN tel que tout nombre *n* a un successeur $n+1$, 0 n'est le successeur d'aucun nombre entier naturel, deux éléments différents ont deux successeurs différents, si une partie de $\mathbb{N}$ contient 0 et le successeur de tous ses éléments, alors elle est égale **à** $\mathbb{N}$**.**
- Ainsi une année comporte 12 mois. Le nombre 12 représente le cardinal de l'ensemble des mois de l'année. Si l'on énumère le rang des mois à partir de Janvier, Décembre sera au rang '12', c'est le douzième dans la liste de l'énumération (aspect ordinal).

➘ **La numération décimale** est notre système de numération courant. La suite numérique est une suite algorithmique, itérée de 1 en 1 : $0;1;2;3;......$

Dans ce système, les nombres, utilisés pour dénombrer des quantités, sont écrits avec des « chiffres ». Ainsi, le nombre de doigts d'une main est 5, ce nombre utilisant le seul chiffre '5' pour son écriture. Le nombre de doigts des deux pieds nécessitera lui, l'utilisation de deux chiffres '1' et '0' pour traduire la quantité '10'.

D'autre part, dans l'écriture chiffrée d'un nombre, les chiffres n'ont pas la même valeur suivant leur position dans le nombre ; c'est une numération de position. Un chiffre placé à gauche d'un autre exprime des unités 10 fois plus fortes que cet autre. Le chiffre 0 indique les unités d'ordre qui manquent.

Ainsi un nombre entier à trois chiffres s'écrit sous la forme $\overline{cdu}$, *c* représentant le chiffre des centaines, *d* celui des dizaines, et *u* celui des unités.

- Par exemple dans le nombre 456 : le chiffre des centaines est 4, le chiffre des dizaines est 5, enfin 6 est le chiffre des unités.

Cette numération décimale est construite sur une « base dix » c'est-à-dire sur des groupements échanges de dix unités. Ainsi dès qu'on a atteint dix unités dans un rang, on peut les grouper pour fabriquer une unité du rang supérieur : dix unités = 1dizaine, dix dizaines = 1centaine…… Le nombre $\overline{mcdu}$ se décompose sous la forme $m\times10^3+c\times10^2+d\times10^1+u\times10^0$, appelée « décomposition canonique » du nombre.

- Ainsi dans le nombre 2456, on peut compter 2456 unités, mais aussi 245 dizaines (avec 6 unités restantes). On dit que le nombre de dizaines est 245 car $2456=245\times10+6$. De même, le nombre de centaines 24 (avec 56 unités restantes) car $2456=24\times100+56$. Le nombre de milliers est 2 (avec 456 unités restantes).

➘ La **décomposition canonique** d'un nombre, écriture du nombre en base dix (nombre d'unités, de dizaines, de centaines…) permet de faire le lien entre son écriture chiffrée $\overline{cdu}$ et sa valeur $\overline{cdu}=c\times100+d\times10+u$:

- d'une part chaque chiffre a une valeur comprise entre 0 et 9. Cette condition est donc à prendre en compte quand on cherche la valeur d'un chiffre inconnu.
- d'autre part la valeur de chaque chiffre dépend de sa position, définie par la base dix de cette numération.

↘ Quelques autres caractéristiques de notre numération parlée et écrite

Voici plusieurs expressions de trois nombres :

Lecture et écriture sous forme littérale :	*Quatre-vingts*	*dix-sept*	*deux mille trois cent quatre-vingt-quinze*
Ecriture sous forme chiffrée	80	17	2395
Le son !	4…20	10…7	2000..300…4…20…15
Le son analysé	4×20	$10+7$	$2\times1000\ +\ 3\times100\ +\ 4\times20+15$
Décomposition canonique	8×10	$1\times10+7$	$2\times1000+3\times100+9\times10+5$

Si l'on observe les différentes expressions d'un même nombre, on voit d'ores et déjà que ces nombres se décomposent tantôt sur un mode additif (17, 29, 70...), tantôt sur un mode multiplicatif (80, 120,…), la plupart en composant les deux modes (312, 264, 687...) et si la décomposition canonique montre une structure claire de la numération écrite, il n'en est pas de même de notre numération parlée ou littérale. On peut cependant y retrouver les caractéristiques d'une numération de position (*deux cents* est différent de *cent deux)*, l'utilisation d'un nombre fini de mots et de signes identique à la base utilisée (10), un décodage d'une écriture de type additif, multiplicatif et puissances de dix (comme à l'écrit).

Dans la numération parlée et littérale, on utilise 23 mots - nombres pour dire les nombres de 1 à mille :
16 mots pour compter de 1 à 16, 5 mots pour les dizaines de 20 à 60, cent, mille sont nécessaires. On remarque que le zéro n'est jamais dit (par exemple, 5006 : cinq mille six) et le 1 n'est prononcé que pour les unités (1115 : mille cent quinze).

La numération parlée et la suite orale présentent un certain nombre « de particularités » comme :

- Certaines dizaines sont cachées : *onze, douze au lieu de dix un, dix deux...*
- Vingt **et** un au lieu de vingt-un, *après dix-huit, dix-neuf...*
- Le mode multiplicatif est parfois caché : *trente au lieu de trois-dix*
- *Huit mille, huit cents*, pourquoi pas *huit-dix* au lieu de *quatre-vingts* qui utilise la base 20($80=4\times20$)?
- Des variantes régionales : soixante-dix ($60+10$) ou septante, mais jamais *sept dix* (7×10), mille deux cents $1000+2\times100$ ou douze cents 12×100
- Deux modes différents dans 100000 (100×1000) et dans 1100 ($1000+100$)
- Au-delà des puissances de la base (*dix, cent, mille*), utilisées jusqu'à mille, on voit ensuite apparaître les millions, les milliards (trois cents quarante-huit *millions* deux cents dix-sept *mille* cent douze).
- La comparaison se fait directement sur les puissances de la base pour les grands nombres sans rapport avec la longueur « orale » : *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf* et *mille.* Pour les petits nombres, on fait référence à la comptine numérique : *vingt-trois* est placé avant *trente.*

↘ Principales règles d'orthographe[2]

- Le trait d'union joint deux éléments qui sont l'un et l'autre inférieur à 100 : *vingt-deux* mais *cent deux*
- *Vingt et cent* prennent un *s* au pluriel quand s'ils ne sont pas suivis : *quatre-vingts* mais *quatre cent un*
- *Mille* est invariable
- *'Million et milliard'* sont considérés comme des noms et s'accordent au pluriel.

[2] Penser aux points d'orthographe pour le concours