S13. Autour des théorèmes de PYTHAGORE et THALES

Mise en route

A. Dans chaque exercice, une configuration à reconnaître… une propriété à connaitre… une démonstration à rédiger

1. ARC est un triangle rectangle en A tel que $RC = 13m$ et $AR = 5m$. Calculer la longueur AC.

2. NUL est un triangle tel que $NU = 42\ cm,\ LU = 46\ cm$ et $LN = 62\ cm$. NUL est-il un triangle rectangle ?

Les points N, I, L sont tels que $NI = 14\ cm,\ LI = 16\ cm$ et $LN = 35\ cm$. NIL est-il un triangle rectangle ?

3. NEZ est un triangle tel que $NE = 75\ cm,\ EZ = 45\ cm$ et $NZ = 60\ cm$. Démontrer que ce triangle est rectangle.

4. ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle M le milieu de [AB] et N le milieu de [DC]. Démontrer que (OM) est parallèle à (BC) et que (ON) est parallèle à (AD). Que peut-on en déduire ?

5. Deux cercles de rayons respectifs $3cm$ et $4cm$ et de centres respectifs O et O' distants de $5cm$, se coupent en deux points A et B. On trace le diamètre [AC] de l'un et le diamètre [AD] de l'autre.

Calculer la longueur CD.

6. Tracer un triangle ABC. Soit S le milieu de [AB] et K le milieu de [SC]. Soit D le point d'intersection de (AK) et (BC). Tracer la parallèle à (AK) passant par S : elle coupe (BC) en E.

Vrai ou faux $BE = ED = DC = \dfrac{BC}{3}$?

7. Construire le triangle OAB tel que $OA = 6\ cm,\ OB = 9\ cm$ et $AB = 4{,}5\ cm$. Placer sur [OA] le point E tel que $OE = 5\ cm$. La parallèle à la droite (AB) passant par E coupe (OB) en F. Calculer EF et OF.

8. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 4cm,\ AC = 5cm$ et $BC = 6cm$. Placer les points M et N tel que M soit sur [AB], N soit sur [AC] et $BM = CN = 1cm$. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

B. Partage d'un segment

Le but de ce paragraphe est l'étude de partages en parties égales d'un segment donné [AB], selon trois méthodes différentes. *On réalisera les constructions à la règle non graduée et au compas, et on laissera les traits de construction apparents.*

1. Méthode classique de partage en trois

Construction : Tracer un segment [AB], puis une demi-droite $[Ax)$ issue de A, non parallèle à la droite (AB). Sur cette demi-droite, construire trois points distincts X, Y Z tels que les segments [AX], [XY], [YZ] soient isométriques. La parallèle à la droite (ZB) issue de X rencontre le segment [AB] en un point U.

- **a**. Décrire la construction au compas de la parallèle à la droite (ZB) passant par X.
- **b**. Terminer le partage en trois de [AB] en décrivant la construction réalisée.
- **c.** Montrer que U est au tiers du segment [AB] en partant de A.

2. Deuxième méthode de partage en trois

Construction : Construire deux points C et D qui soient les sommets de deux triangles équilatéraux distincts de base le segment [AB]. Construire le symétrique E de A par rapport à C. La droite (ED) coupe [AB] en V.

a. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles

b. Montrer que $BV = \frac{1}{3} AB$

3. Généralisation de la méthode classique en un partage en cinq

Formuler sans la justifier la méthode permettant ce partage en cinq.

4. Méthode du « guide-âne »

Un guide-âne est une feuille de papier calque de 21cm sur 29,7 cm, sur laquelle sont tracées des droites parallèles entre elles et équidistantes de 1 cm. Ces droites sont parallèles au grand côté de la feuille. Indiquer comment on peut utiliser le guide-âne pour partager un segment [AB] donné en six parties égales. Le segment [AB] peut-il avoir n'importe quelle longueur ?

Pour s'exercer

Exercice1.

Tracer deux cercles *C et C'* de centres respectifs I et J, et sécants en M et N. Soit A le second point d'intersection du cercle *C* et de la droite (MI). Soit B le second point d'intersection du cercle *C'* et de la droite (MJ). Démontrer que les points A, N, B sont alignés et que (AB) est parallèle à (IJ).

Exercice 2.

Tracer un triangle ABC. Construire les points D, symétrique de A par rapport à C, E symétrique de C par rapport à B, F symétrique de B par rapport à A, G symétrique de A par rapport à B, H symétrique de C par rapport à A, et I symétrique de B par rapport à C.

Démontrer que le périmètre du polygone FHEGDI est le triple du périmètre du triangle ABC.

Exercice 3.

a. Tracer un segment [DE] mesurant 13cm, puis le cercle de diamètre [DE]. Soit F un point du cercle tel que $DF = 12cm$. Calculer EF.

b. Placer le point M de [DE] tel que $DM = 4cm$. Tracer la perpendiculaire à (DF) passant par M : elle coupe (DF) en N. Calculer les valeurs exactes de MN et FN.

Exercice 4.

Soit un triangle équilatéral de périmètre *27cm*. Placer les points A, B, C tels que A soit sur [EF], B soit sur [DF] et C soit sur [DE], et tels que $EA = DB = DC = 3cm$. Quelle est la nature du quadrilatère ABCE ? Justifier.

Exercice 5.

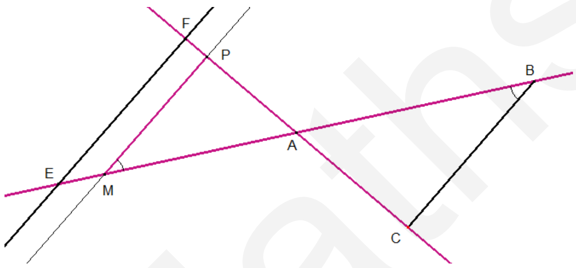
Soit un triangle BOL tel que $BO = 3\ cm,\ BL = 4\ cm\ et\ OL = 5\ cm$. Construire un triangle BIP qui soit une réduction de rapport $\frac{3}{4}$ du triangle BOL. Le triangle BIP est-il rectangle ? Calculer de deux façons différentes son périmètre puis son aire.

Exercice 6

ABCD est un rectangle tel que $AD = 7cm\ et\ AB = 5cm$. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Calculer la longueur exacte de la longueur AC.
2. Sur le segment [AB], on place le point I tel que $AI = 3cm$. Sur le segment [AC], on place le point J tel que $AJ = 5{,}1cm$. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?

Exercice 7



Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Les points E, M A, B sont alignés dans cet ordre, les points F, P, A, C sont alignés dans cet ordre. Les droites (EF) et (MP) sont parallèles.

$AM = 6 \quad MP = 4{,}8 \quad AP = 3{,}6 \quad EF = 6 \quad AC = 4{,}5 \quad AB = 7{,}5$

a. Démontrer que le triangle AMP est un triangle rectangle.

b. Calculer la longueur AE et en déduire ME.

c. Démontrer que (MP) et (BC) sont parallèles

d. Démontrer que les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{AMP}$ sont égaux.

Exercice 8

1. Le triangle ABC est tel que $AB = 5{,}25 \quad BC = 8{,}75\ et\ AC = 7$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

2. a. Soit E un point du segment [AC] tel que $EC = 4$. Calculer AE.

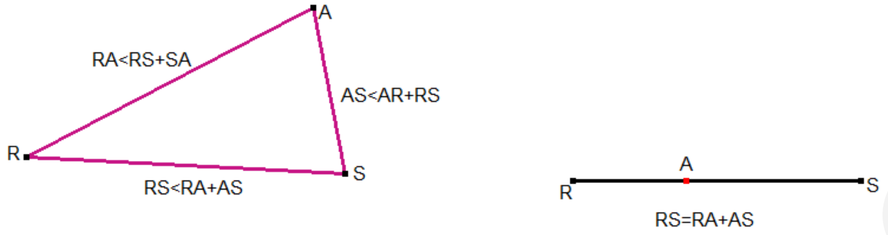
b. La parallèle à (AB) passant par E coupe [BC] en F. Calculer EF.

3. La parallèle à (AC) passant par F coupe [AB] en G. Quelle est la nature du quadrilatère AEFG ? On donnera la réponse la plus précise possible en la justifiant.

☞ **A retenir**

↘Existence d’un triangle

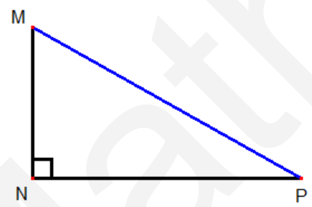
« *Entre deux points, le plus court chemin est la ligne droite* ». Cela signifie que, dès lors que trois points forment un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des deux autres. En cas d’égalité le triangle est aplati. Pour qu’un triangle existe, il faut que cette inégalité triangulaire soit vérifiée.



↘ Pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, on peut utiliser le **Théorème de Pythagore:**

· Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

$MP^2 = MN^2 + NP^2$ $\qquad$ $MN^2 = MP^2 - NP^2$ $\qquad$ $NP^2 = MP^2 - MN^2$



↘ Pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle, on peut utiliser la **Contraposée du théorème de Pythagore:**

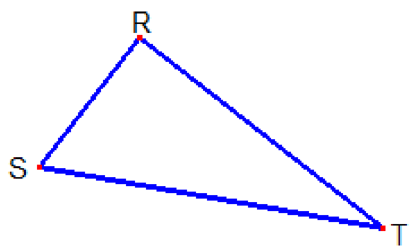
· Si le carré du plus grand côté d’un triangle n’est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, le triangle n’est pas rectangle.

On calcule séparément les carrés des longueurs des côtés, puis on regarde s’il y a égalité ou non. De même dans le cas suivant.

↘ Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on peut utiliser la **Réciproque du théorème de Pythagore:**

· Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au plus grand côté.

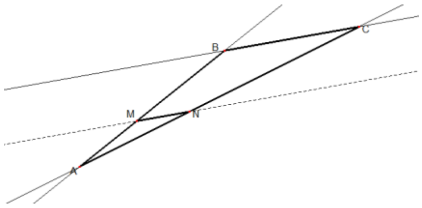
Si $ST^2 = RS^2 + RT^2$, alors le triangle RST est rectangle d’hypoténuse [ST].

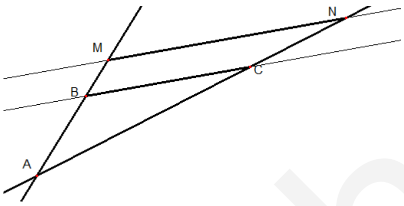


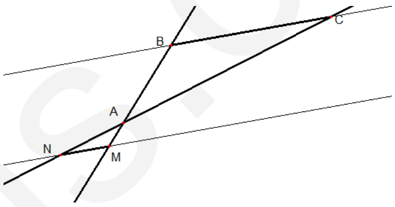
↘ Pour calculer une longueur connaissant des droites parallèles, on peut utiliser la **Propriété de Thalès:**

- **Dans le triangle** : Si, dans un triangle ABC, M est un point de [AB], N un point de [AC], et [MN] est parallèle à [BC], alors les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles et on peut écrire $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$
- **Plus généralement** : Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A ; soient M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC). Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les triangles AMN et ABC ont leurs côtés associés proportionnels d'où $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

Deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles déterminent deux triangles dont les longueurs des côtés sont proportionnelles. Trois configurations sont possibles :







Cas particulier des milieux :

- Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.

↘ Pour montrer que des droites sont parallèles, on peut utiliser la **Réciproque du théorème de Thalès:**

- Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soit M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC). Si les points A, B, M, d'une part et les points A, C, N, d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Cas particulier des milieux : Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

- Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.
- ↘ Agrandir, réduire dans le plan
- Si deux figures F *et* F' sont de même nature et que les longueurs des côtés de F' sont proportionnelles à celles de F dans un rapport k, alors :

  Quand $k>1$: F' est un agrandissement de F

  Quand $0<k<1$: F' est une réduction de F.

  Dans un agrandissement ou une réduction, les mesures des angles sont conservées.