

S15. Autour des NOMBRES REELS

Mise en route

A. VRAI ou FAUX? Justifier...

$\frac{1}{20} = 0,50$ $\frac{1}{5} = 0,2$ $\frac{1}{3} = 0,333$ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{5}$ $\sqrt{2} = 1,414$ $\pi = 3,14$

B. Donner la valeur exacte du quotient décimal de 19 par 13.

- Le nombre rationnel $A = \frac{19}{13}$ est-il un nombre décimal ?
- Quelles sont les 5^{ème}, 26^{ème} et 40^{ème} décimales de ce nombre ?
- Donner une troncature de ce quotient à quatre décimales.
- Donner la valeur exacte du quotient euclidien de 19 par 13, puis un encadrement de A à l'unité près.
- Donner un encadrement de A au centième près.
- Donner une valeur approchée de ce quotient au centième près.
- Donner l'arrondi au dixième de ce quotient, puis au centième.

C. On donne les nombres rationnels suivants : $A = \frac{364}{1001}$ et $B = \frac{384}{275}$.

Les nombres A et B sont-ils des nombres décimaux ? Le nombre A + B est-il un nombre décimal ?

D. Soit $A = \frac{a}{85}$ et $B = \frac{85}{b}$. Déterminer un entier a et un entier b pour que chaque écriture fractionnaire soit :

- Celle d'un entier naturel
- Celle d'un décimal non entier
- Celle d'un rationnel non décimal

E. Mettre une croix dans toutes les cases pour lesquelles la réponse est "oui".

Le nombre est :	$\frac{35}{10}$	$\sqrt{3}$	$\frac{45}{3}$	π	5,72	$\sqrt{1+3}$
Entier						
Décimal						
Rationnel						
Irrationnel						

F. On considère le nombre $x = 0,9\bar{9}$, de période 9.

1. Calculer 10x, en déduire 9x. En déduire que $0,9\bar{9} = 1$.
2. Déterminer une écriture fractionnaire de $5,6\bar{6}$ puis de $19,78\bar{8}$.

Pour s'exercer¹

Exercice 1

- Ranger dans l'ordre croissant les décimaux suivants : 1,7 ; 1,07 ; 1,109 ; 1,81 ;
- Donner deux décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,12.
- Donner en heures, minutes et secondes les durées suivantes exprimées en heures dans le système décimal, puis donner leur écriture en fraction d'heures: 1,5 ; 2,25 ; 0,3 ; 3,375.

Exercice 2

- Un spectacle a duré 3 heures et 25 minutes. Exprimer la mesure de cette durée, en prenant l'heure comme unité, sous forme d'une fraction irréductible. Ce nombre est-il un décimal ?
- Une mesure de durée est exprimée sous la forme n heures et p minutes ($0 < p < 60$). Pour quelles valeurs de n et p la mesure en heures de la même durée sera-t-elle exprimée par un nombre décimal ?

Exercice 3

1. On considère deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

- Sont-ils des nombres décimaux ?
 - Comparer ces deux nombres.
 - Trouver un nombre décimal **strictement** compris entre ces deux nombres.
 - Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.
- Poser et effectuer les divisions de 91 par 27 ; de 38 par 7 ; de 9 par 8.
 - Expliquer les répétitions apparues dans les décimales du quotient, à l'aide du rôle du reste dans la division.
3. On convient de noter $x = 3,0\overline{12}$. Que signifie cette convention ?

Déterminer la fraction irréductible égale à $x = 1,6\overline{}$, $y = 2,0\overline{9}$ et $z = 3,0\overline{12}$

Exercice 4

La division euclidienne de 64 par 27 permet d'écrire l'égalité $\frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27}$.

a. Effectuer la division euclidienne de 100 par 27. En déduire l'égalité : $\frac{64}{27} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \left(\frac{19}{27} \right)$

et en déduire le chiffre des dixièmes de l'écriture à virgule de $\frac{64}{27}$.

b. Réitérer la procédure pour trouver le chiffre des centièmes et le chiffre des millièmes de $\frac{64}{27}$.

c. Retrouver en utilisant ces calculs :

¹ D'après Martinique 2004 - Aix Marseille 1996 - Amiens 1998 - Aix-Marseille 97 - Aix-Marseille 1998- Groupe 6 2007

- pourquoi l'écriture décimale de $\frac{64}{27}$ est périodique et infinie,
- pourquoi on obtient par ce procédé un seul chiffre à chaque quotient.

Exercice 5

1. On se propose de dénombrer les solutions de la double inégalité : $3,8276 < 3,8\overline{m}4 < 3,834$ où deux chiffres sont à déterminer pour satisfaire l'encadrement.

a. Trouver le nombre de réponses possibles. On pourra construire un arbre de choix.

b. On considère le nombre \overline{cm} formé par deux chiffres. Quelles conditions doit-il satisfaire pour que $3,8276 < 3,8\overline{cm}4 < 3,834$

2. Dénombrer les solutions de la double inégalité : $43,8276 < 43,5\overline{m}4 < 43,834$ sachant que trois chiffres sont à déterminer. Justifier la réponse.

Exercice 6

La lettre x désigne un nombre. Dire en justifiant si les énoncés sont vrais ou faux :

Énoncé 1 : « Si $2x$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

Énoncé 2 : « Si $\frac{x}{2}$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

Énoncé 3 : « Si $x + 1$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel. »

☞ A retenir

Lorsqu'on étudie 'le nombre', il ne faut pas confondre sa **nature** et son **écriture**. Sa nature est déterminée par les ensembles auxquels le nombre appartient : \mathbb{N} ou \mathbb{Z} l'ensemble des entiers naturels ou relatifs, \mathbb{D} l'ensemble des décimaux, \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels, \mathbb{R} l'ensemble des réels. Son écriture est diverse, il est d'ailleurs plus juste de parler de ses diverses représentations qui peuvent être sous forme fractionnaire, décimale, scientifique.

Ces ensembles de nombres sont ordonnés, c'est-à-dire qu'une relation d'ordre y est définie : tout nombre réel peut être approché « d'aussi près que l'on veut » par des nombres décimaux.

📌 Comment déterminer la nature d'un nombre à partir de son écriture décimale ?

- L'écriture décimale d'un nombre décimal est **finie**, avec n chiffres après la virgule (ex : 6,174895).
- Si l'écriture décimale est **périodique* et illimitée**, c'est la plupart du temps celle d'un rationnel non décimal $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$): il existe en effet un nombre fini de valeurs possibles pour les restes successifs dans la division euclidienne de a par b . Ces valeurs sont toutes inférieures au diviseur b , donc à un moment donné, on retrouve toujours la même valeur. Ainsi $\frac{43}{7} = 43 : 7 = 6,1428571428 \dots$

* « L'écriture décimale admet **une période** » signifie que les 'chiffres significatifs' de la partie décimale se répètent indéfiniment dans le même ordre.

Inversement pour retrouver l'écriture fractionnaire de $x = 24,5\overline{6}$, on calcule $100x$, puis $99x$, enfin x .

$$100x = 2456,5\overline{6} \quad 99x = 2456,5\overline{6} - 24,5\overline{6} = 2432 \quad x = \frac{2432}{99} \text{ est une fraction irréductible.}$$

Si la période comprend 1, 2, 3... chiffres, on choisira de calculer respectivement $10x$, $10x$, $1000x$... puis de lui soustraire $9x$, $99x$, $999x$... afin de trouver une valeur entière permettant ensuite de déterminer le quotient.

▪ Pourtant si cette écriture décimale est une suite **périodique illimitée de 9**, elle est alors l'écriture cachée d'un nombre entier ! Ainsi $1,9\overline{9} = 2$ et $15,9\overline{9} = 16$.

En effet $si x = 15,9\overline{9}$ alors $10x = 159,9\overline{9}$ et $9x = 144$ d'où $x = \frac{144}{9} = 16$

▪ Si la suite est **illimitée non périodique**, on admet que c'est celle d'un nombre irrationnel.

➤ Comment déterminer la nature d'un nombre à partir de son écriture fractionnaire ?

- Un **nombre rationnel** $\frac{a}{b}$ est le quotient de deux entiers a et b , b étant non nul.
- Un **nombre décimal** peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale $\frac{N}{10^n}$. C'est donc un rationnel.
- Un **nombre rationnel est décimal** si sa forme irréductible ne comporte au dénominateur que des facteurs 2 ou 5, soit $\frac{n}{2^a \times 5^b}$ avec a et b entiers positifs.

➤ Sous quelle forme exprimer la valeur approchée d'un nombre réel ?

Selon les contextes, on choisira de donner un encadrement, un arrondi, une troncature ou une valeur approchée ... par défaut ou par excès.

- Par exemple pour donner une valeur de π on peut écrire **l'encadrement** $3,141592 \leq \pi < 3,141593$

L'amplitude de cet encadrement est de 0,000001 ou 10^{-6} qui représente l'écart entre les deux bornes.

- On peut aussi donner **une troncature** de π au centième: 3,14. La troncature « coupe » le nombre au rang indiqué.
- Parfois **l'arrondi** est préféré. L'arrondi est obtenu en coupant le nombre au rang indiqué mais en prenant en compte la valeur du chiffre du rang suivant :
Si le chiffre du rang suivant est inférieur à 5, on garde les chiffres retenus.
Si le chiffre du rang suivant est égal ou supérieur à 5, on augmente d'une unité le dernier chiffre retenu.
Ainsi l'arrondi de π au centième s'écrit aussi 3,14. L'arrondi de π à 10^{-5} est 3,14159 mais l'arrondi de π à 10^{-4} est 3,1416.
- Parfois on choisira **les valeurs approchées** du nombre, par défaut c'est-à-dire immédiatement inférieure (ou égale), par excès immédiatement supérieure.

Une valeur approchée de π à 10^{-2} près par défaut est 3,14 alors qu'une valeur approchée de π à 10^{-2} près par excès est 3,15.