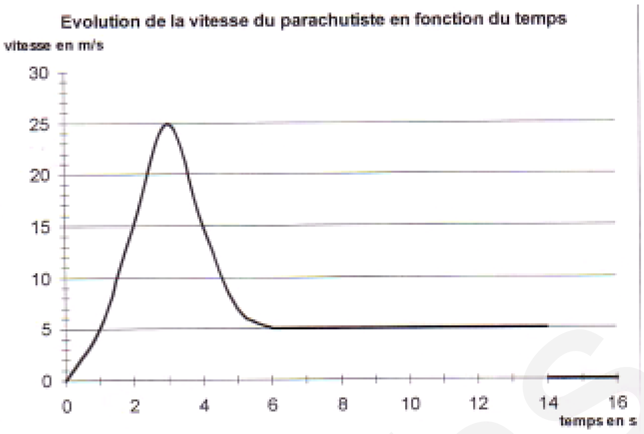
S17. Autour de la NOTION de FONCTION
Fonctions linéaires et affines-Représentations graphiques

Mise en route[1]

A. Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.



Pendant la chute, sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?

Quelles sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?

Décrire l'évolution de a vitesse du parachutiste entre les points d'abscisse 3s et 6s.

Quelle distante le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?

Sachant que la distante totale parcourue par le parachutiste est de 115 mètres, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.

B.

I. Une société de transport décide de mettre en service un train rapide entre les villes de Cherbourg et Caen de 132 km. Sachant que la vitesse moyenne est de 165km/h, calculer en minutes la durée du trajet Cherbourg-Caen.

II. Le prix normal du billet est proportionnel au nombre de kilomètres parcourus : le prix pour un kilomètre est de 0,12 €. Cette société décide de proposer un tarif réduit aux 15-25ans, selon deux possibilités :

Tarif A : réduction de 25% sur tous les trajets

Tarif B : achat d'une carte 15-25ans » au prix de 30€ valable un an, permettant d'obtenir une réduction de 50% sur tous les trajets.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Ecrire les calculs pour 500km.

	Tarif A	Tarif B
Dépense annuelle pour 500km		
Dépense annuelle pour 1500km		

[1] Aix 2004/ Bordeaux 2002

2. Soit t_1 la dépense annuelle en euros pour x km avec le tarif A et t_2 la dépense annuelle pour x km avec le tarif B. Exprimer t_1 et t_2 en fonction de x.
3. Résoudre l'inéquation $0,06x+30<0,09x$. A partir de quel kilométrage annuel l'achat de la carte « 15-25 » est-il avantageux ?
4. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prend sur l'axe des abscisses 1cm pour représenter 200km et sur l'axe des ordonnées 1cm pour 10€. Tracer la droite d_1 d'équation $y=0,09x$ et la droite d_2 d'équation $y=0,06x+30$. Retrouver graphiquement le résultat de la question 3b).

C. Je prends l'avion pour New York et à l'arrivée je vois de la neige sur la piste. Pourtant à l'aéroport on annonce une température au sol de 32 degrés! Je trouve dans un journal, à la page météo un tableau donnant la correspondance entre deux unités de mesure de températures.

T°C (degrés Celsius)	-20°	-10°	-5°	0°	5°	15°	25°	50°
T°F (degrés Fahrenheit)	-4°	14°	23°	32°	41°	59°	77°	122°

Que remarque-t-on ? En particulier, y a-t-il proportionnalité entre les deux températures T°F et T°C ?
Compléter alors le tableau ci-dessous:

T°C	-30°		0°	10°		90°
T°F		5°			104°	

Connaissant une température T°C, exprimer la température T°F associée.
Le titre du film " Fahrenheit 451 " fait allusion à la température du feu. Quelle est cette température en degrés Celsius, arrondi au dixième de degré près?

Pour s'exercer[2]

Exercice 1

Le jardin de Mr Durand a la forme d'un trapèze rectangle ABCD tel que AB = 50 m,AD = 30 m, DC = 70 m.
Les angles $\hat{A}$ et $\widehat{D}$ sont droits. Soit M un point du segment [AB]. On pose AM = x.
La parallèle à la droite (AD) passant par M coupe la droite (DC) en G. Le jardin est ainsi partagé en deux parties, d'une part le rectangle AMGD qui est le potager, d'autre part le reste qui est la pelouse.

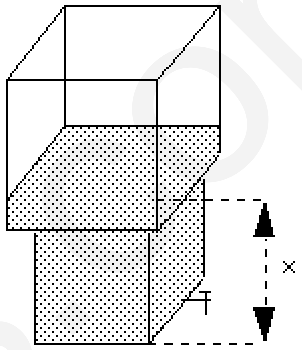
1. Calculer l'aire du jardin.
2. Exprimer en fonction de x, l'aire du potager AMGD. En déduire l'aire de la pelouse BCGM.
3. Pour quelle valeur de x la pelouse et le potager ont-ils la même aire ? Quelle est alors la forme du potager. Justifier les réponses.

[2] Groupe 6-2006, Dijon 2001, Bordeaux 1996, Reims 1998

4. *a*. Représenter sur un même graphique, les fonctions donnant l'aire du potager AMGD et l'aire de la pelouse BCGM en fonction de *x*. On utilisera pour cela le papier millimétré et on prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 10 mètres sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 m² sur l'axe des ordonnées.
b. Retrouver graphiquement le résultat de la question 3. Expliquer.
5. Sachant que dix kilos de semences sont nécessaires pour une pelouse de 500 m², quelle quantité est nécessaire pour ensemencer 900 m² ?

Exercice 2

Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent.
L'arête du grand cube mesure 80 cm, celle du petit cube mesure 60 cm.



1. Quel est le volume total, en litres, de la cuve ?
On désigne par *x* (en cm) la hauteur du liquide dans la cuve et par *V(x)* le volume, en litres, du liquide correspondant.
2. Exprimer *V(x)* en fonction de *x*.
3. Représenter graphiquement le volume *V(x)*
(On prendra en abscisse 1 cm pour 10 cm et en ordonnée 1 cm pour 50 litres.)
4. On considère la fonction *W* définie de la manière suivante :
$W(x) = 728 - 3{,}6\,x \text{ si } 0 \leq x \leq 60$ et $W(x) = 896 - 6{,}4\,x \text{ si } 60 < x \leq 140$
Quelle signification peut-on donner à la fonction *W* en liaison avec la situation de la cuve ?
5. Représenter graphiquement la fonction *W* dans le repère précédent.
6. Donner graphiquement les coordonnées du point d'intersection des deux représentations graphiques précédentes. Quelle signification peut-on donner à l'abscisse de ce point d'intersection en liaison avec la situation de la cuve ? Contrôler la valeur de cette abscisse par le calcul.

Exercice 3

Dans un magasin, on donne un billet de tombola à tout client achetant 1 sac de 1 kg de terreau à 1,50 € ou 1 paquet de 250 g de graines à 3 €. Un client dispose de 14,25 € et son panier ne peut contenir que 5 kg de marchandises. On se demande comment il va pouvoir obtenir le plus grand nombre possible de billets de tombola.

a. Proposez une solution *expérimentale*, sachant que le nombre de sacs est compris strictement entre 2 et 6 et que le nombre de paquets est compris strictement entre 1 et 4.
b. On se propose maintenant d'utiliser une méthode algébrique. Si ***x*** désigne le nombre de sacs et ***y*** le nombre de paquets, écrivez toutes les conditions que doivent vérifier ***x*** et ***y***.
c. Construisez les droites *D1 et D2* d'équations: $(D1): x + 2y = 9{,}5$ *et* $(D2): 4x + y = 20$
d. Comment peut-on utiliser les constructions précédentes pour résoudre ce problème ? Retrouvez les solutions du a)**.**

☞ **A retenir**

Nous avons vu en S13 que la relation de proportionnalité entre deux grandeurs se traduit par une fonction linéaire. Soit a un nombre réel fixé. La fonction linéaire de coefficient a se note $f : x \longmapsto a\, x$. Dans sa représentation graphique, les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine et par le point de coordonnées $(1, a)$, a étant le coefficient directeur de la droite.

Qu'appelle t'on fonction affine ?

Soient a *et* b deux nombres fixés. En associant à chaque nombre x le nombre $a \times x + b$, on définit une fonction affine $g : x \mapsto a \times x + b$. L'image de x est notée $g(x) = ax + b$. La fonction $f : x \longmapsto a\ x$ est la fonction linéaire associée à g.

Ainsi soit g la fonction affine définie par $g : x \mapsto 2x - 3$. L'image de 0 est $g(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$

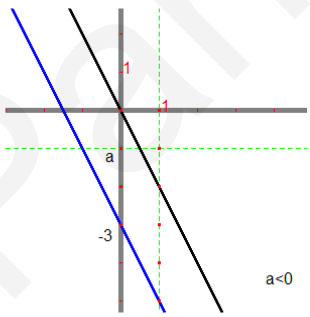
L'image de 5 est 7 car $g(5) = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$, **p**ar contre l'antécédent de 5 est 4 car $g(x) = 2x - 3 = 5 \quad 2x = 8 \quad x = 4$

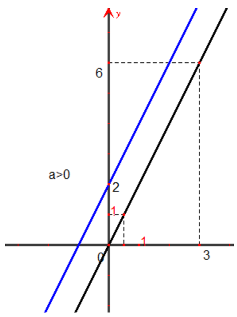
Dans un contexte plus familier, ce type de fonction peut par exemple représenter le prix à payer pour des séances de cinéma où la carte d'adhésion bimensuelle a une valeur forfaitaire de 10€, et chaque place d'adhérent le prix de 6,50€. La fonction liant le nombre de places achetées et le prix payé s'écrit alors sous la forme $g(x) = 6{,}5x + 10$. Le tarif sans carte étant de 9€, il y a proportionnalité dans ce cas entre le nombre de places achetées et le prix payé et la fonction est linéaire $f(x) = 9x$. On peut rapidement voir pour quel nombre de séances (valeurs de *x*) le tarif adhérent est avantageux ($g(x) < f(x)$ *pour* $x > 4$)

L'ensemble des points de coordonnées $(x, ax + b)$ est appelé représentation graphique de la fonction affine.

Dans un repère orthogonal du plan, c'est la droite parallèle à la droite représentant la fonction linéaire associée, et passant par le point de coordonnées $(0,\ b)$. Le coefficient a représente toujours la pente ou coefficient directeur de la droite, et le coefficient b l'ordonnée à l'origine. Pour tracer cette droite deux points suffisent (on en prend en général trois pour s'assurer de l'alignement).

On dit que cette droite a pour équation $y = a\ x + b$. Si a = *0*, l'équation est alors $y = b$ et la droite est parallèle à l'axe des abscisses. Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = a\ x + b$, et représente donc une fonction affine.





↘ On retiendra que lorsque deux grandeurs sont liées par une fonction affine, il n'y a pas proportionnalité entre les valeurs de x et leurs images (sauf dans le cas particulier des fonctions linéaires). Par contre il y a proportionnalité entre les accroissements de x et les accroissements des images de x. Ainsi quelles que soient les valeurs x_1 et x_2, cette proportionnalité se traduit par $g(x_2) - g(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a\ (x_2 - x_1)$.

Graphiquement, le coefficient directeur de la droite représentant la fonction g est $a = \dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$