S22.Autour des ISOMETRIES et autres TRANSFORMATIONS.

Mise en route

A. A vous de les découvrir…

Chacun des triangles 2, 3, 4 et 5 est obtenu à partir du triangle 1 à l'aide d'une isométrie (fig.a).

A vous de retrouver laquelle et d'en préciser les caractéristiques.

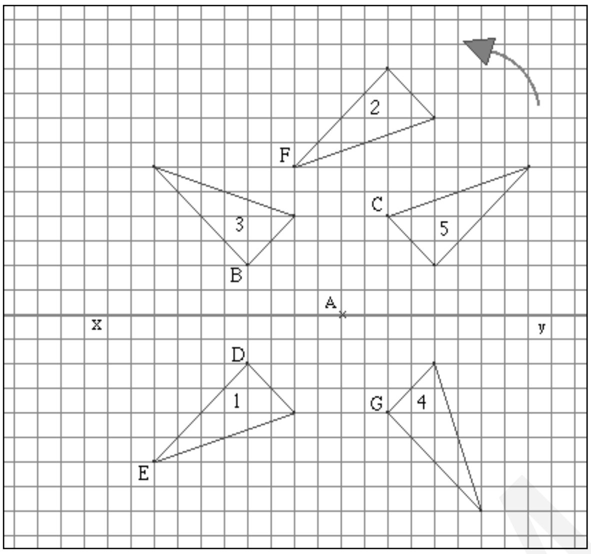


fig. a

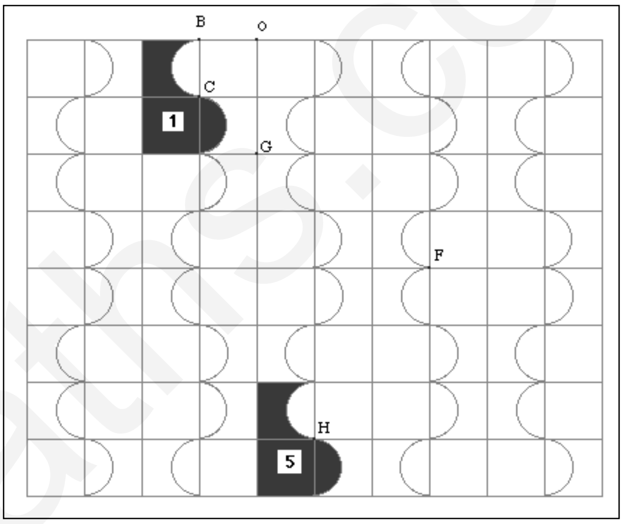


fig. b

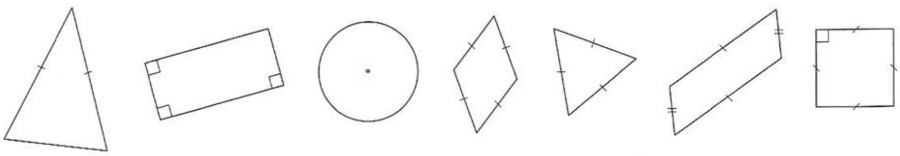
B. A vous de retrouver les images…

Un dessous de plat a la forme d'un rectangle, recouvert d'un carrelage (fig. b)

- Hachurer l'image du motif **1** dans la symétrie d'axe (OG). L'appeler **2**.
- Hachurer l'image du motif **1** dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BF}$. L'appeler **3**.
- Hachurer l'image du motif **1** dans la symétrie centrale de centre C. L'appeler **4**.
- Par quelle transformation le motif **1** a-t-il pour image le motif **5** ?

C. A vous de les reconnaître[1] …

a. Pour chaque figure de base de la géométrie plane, indiquer dans le tableau par Oui / Non la (ou les) isométries qui transforme(nt) cette figure en elle-même (globalement invariante).



1 *(Source : Axiale – Mathématiques Seconde – Hatier2004)*

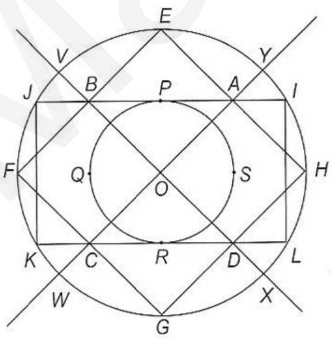
© PariMaths.com

Catherine Marchetti-Jacques
Digitally signed by Catherine Marchetti-Jacques
DN: cn=Catherine Marchetti-Jacques, o=PariMaths.com, ou, email=info@parimaths.com, c=FR
Date: 2011.07.07 10:21:03 -06'00'

	Symétrie centrale	Symétrie axiale	Eléments de symétrie de la figure	Translation	Rotation
Triangle isocèle					
Rectangle					
Cercle					
Losange					
Triangle équilatéral					
Parallélogramme					
Carré					

b. Sur cette figure, les deux cercles *C* et *C'* concentriques ont respectivement pour rayons *R* et *r*, tels que $R = 2r$. Le quadrilatère EFGH est un carré inscrit dans le cercle *C* ; (*wy*) et (*vx*) sont les médiatrices de ses côtés. Le quadrilatère IJKL est un rectangle inscrit dans le cercle *C*, tel que ses côtés [IJ] et [KL] soient tangents au cercle *C'*. Retrouver les images des points indiqués par la transformation donnée : **attention il y a un intrus** !

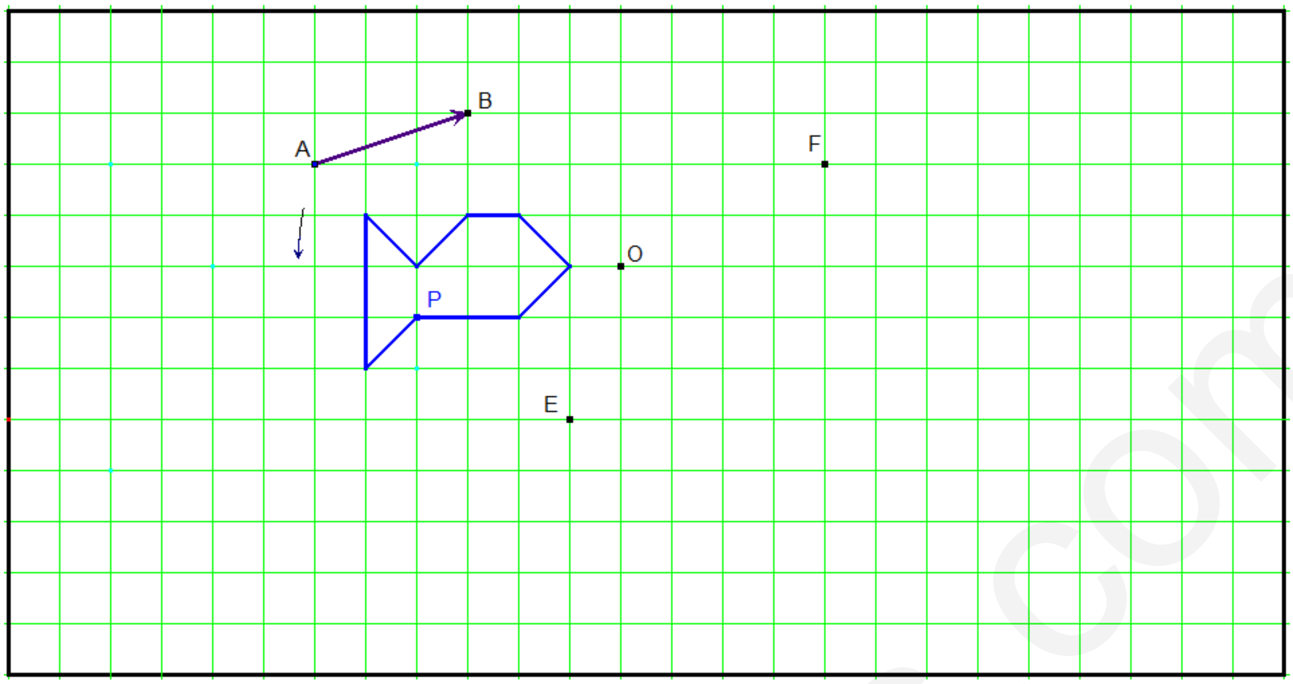
Transformations	Symétrie centrale de centre O				Symétrie d'axe (vx)				Translation de vecteur $\overrightarrow{FO}$				Rotation de centre O, d'angle 90°			
Points	A	X	Q	J	F	O	C	Y	F	O	Q	P	E	D	B	O
Images																



D. A vous de les construire…

- le symétrique P_1 de la figure P par rapport au point O.
- le symétrique P_2 de la figure P par rapport à la droite (EF).
- l'image P_3 de la figure P par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- l'image P_4 de la figure P dans la rotation de centre E, d'angle 90° et dans le sens de la flèche.
- l'image P_5 de la figure P dans l'homothétie de centre O et de rapport 2.
- Parmi ces transformations, lesquelles sont des isométries ?

© PariMaths.com



E. A vos instruments…..

a. Tracer une droite (*d*), puis marquer deux points A et B non situés sur la droite (*d*), la droite (AB) n'étant pas parallèle à la droite (*d*).

· Construire au compas, le symétrique A' du point A par rapport à la droite (*d*).

· A la règle seule, construire le symétrique de la droite (AB) par rapport à la droite (*d*).

b. Tracer deux droites (d_1) et (d_2) perpendiculaires en O, puis marquer un point I tel que I n'appartienne ni à la droite (d_1), ni à la droite (d_2). Les constructions suivantes seront justifiées.

· Construire, à la règle et au compas, le symétrique O' du point O par rapport au point I.

· Construire, à la règle et au compas, la droite (d'_1), symétrique de la droite (d_1) par rapport au point I.

· Construire à la règle seule, la droite (d'_2) symétrique de la droite (d_2) par rapport au point I.

c. Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Sur la même figure, construire à la règle et au compas, les images respectives du parallélogramme ABCD dans la symétrie de centre A, dans la symétrie de centre O, dans la symétrie d'axe (AB), dans la symétrie d'axe (AC).

Justifier rapidement les constructions.

d. Soit MNP un triangle rectangle isocèle en M. Construire l'image du triangle MNP

· par la rotation de centre P et d'angle 60° (dans le sens des aiguilles d'une montre)

· dans la translation de vecteur $\overrightarrow{NP}$

· par l'homothétie de centre P de rapport $k = 2$ puis $k' = -1$.

Ces transformations sont-elles des isométries ?

© ParisMaths.com

☞A retenir

Une **transformation du plan** est une application qui à tout point du plan fait correspondre un point et un seul, qu'on appelle l'**image** du point**.**

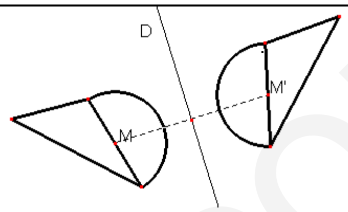
Un point est **invariant** dans une transformation s'il a pour image lui-même par cette transformation.

On appelle **isométrie** toute transformation qui transforme une figure en une figure de mêmes dimensions et de même forme (superposable)

Symétrie d'axe (D) ou réflexion d'axe (D)

Transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que :

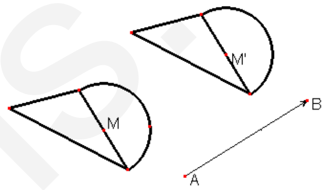
- Si $M \in (D)$, $M' = M$
- Si M $\notin$ (D) , (D) est la médiatrice de [MM']
- Les points de (D) sont les points invariants



Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (vecteur non nul)

Transformation qui à tout point M du plan fait correspondre un point M' tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

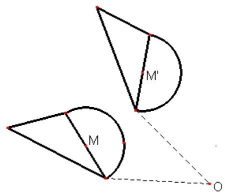
- ABM'M forme un parallélogramme (parfois aplati)
- Aucun point invariant



Rotation de centre O et d'angle α

Transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que :

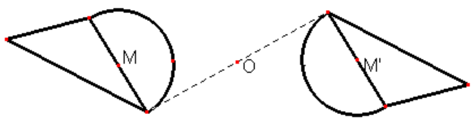
- Si $M = O$, *alors* $M' = O$
- Si $M \neq O$, *alors* $OM' = OM$ et $\widehat{M'OM} = \alpha$
- Le centre O est le seul point invariant



Symétrie de centre O

Transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que O soit le milieu de [MM']

- La symétrie de centre O est une rotation d'angle 180°
- Le centre O est le seul point invariant



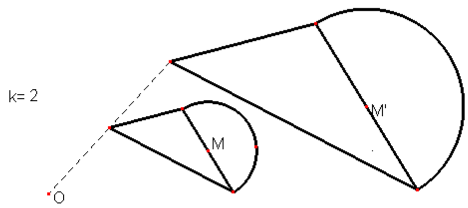
Homothétie de centre O de rapport k

Soit k un nombre réel, O un point du plan.

L'image d'un point M par l'homothétie de centre O de rapport k est le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Le centre O est le seul point invariant

Si $k \neq 1$ *et* $k \neq -1$, l'homothétie n'est pas une isométrie.



© PariMaths.com

Pour s'exercer[2]

Exercice 1

Soient A et A' deux points distincts du plan. On considère la médiatrice (*d*) du segment [AA']. Soit B un point du plan n'appartenant ni à la droite (*d*) ni à la droite (AA').

1. Faire une figure à la règle graduée et au compas, avec les données suivantes $AA' = 4cm$; $AB = 3cm$; $A'B = 4cm$.

2. Sur cette figure, construire à la règle seule (non graduée), le symétrique B' de B par rapport à la droite (*d*). Justifier cette construction.

3. Cette dernière construction est-elle valable dans tous les cas de figure ? Préciser.

Exercice 2

Soit O un point du plan et C un cercle de centre O.

1. a. Expliquer et justifier comment construire à la règle et au compas un carré ABCD inscrit dans C. Effectuer la construction sur une feuille blanche.

b. On note r le rayon de C. Calculer l'aire du carré ABCD en fonction de r.

2. Soit O' le symétrique de O par rapport à la droite (AB). Quelle figure décrit O' lorsqu'on fait tourner le carré ABCD autour de O ? Justifier la réponse.

3. a. Reprendre les questions 1.a et 1.b en remplaçant « un carré ABCD » par « un triangle équilatéral ABC ». La construction sera effectuée sur une feuille blanche.

b. Soit A', B', C' les symétriques respectifs de A, B, C par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Démontrer que le triangle A'B'C' est équilatéral et que les points A, B et C sont les milieux de ses côtés. Que peut-on conclure pour le cercle C ?

Exercice 3

Soit une droite (*d*), un point B appartenant à la droite (*d*) et un point A extérieur à la droite (*d*).

1. **a**. Construire le point C tel que la droite (*d*) soit un axe de symétrie du triangle ABC.

b. Décrire cette construction.

2. Construire le point E, symétrique du point A par rapport au point B. Justifier rapidement.

3. Quelle est la nature du triangle ACE ?

4. Quelle est la nature du triangle BEC ?

Exercice 4 (fig. 4)

1. Construire à la règle et au compas les symétriques A', B' et C'des points A, B, et C par rapport à la droite (OI), puis les symétriques A'', B'' et C'' des points A', B' et C' par rapport à la droite (OJ).

2. A partir de l'observation de la figure obtenue, donner un argument montrant qu'il n'existe pas de symétrie axiale qui transforme les trois points ABC en A''B''C''.

[2] 1. Nancy 2001- 2. Limoges 2001- 3. Orléans 2003- 4. Aix Marseille 2006-

© PariMaths.com

3. Montrer que l'angle $\widehat{BOB''}$ vaut le double de l'angle $\widehat{IOJ}$.

4. Quelle est la transformation du plan transforme ABC en A''B''C'' ? Justifier votre réponse.

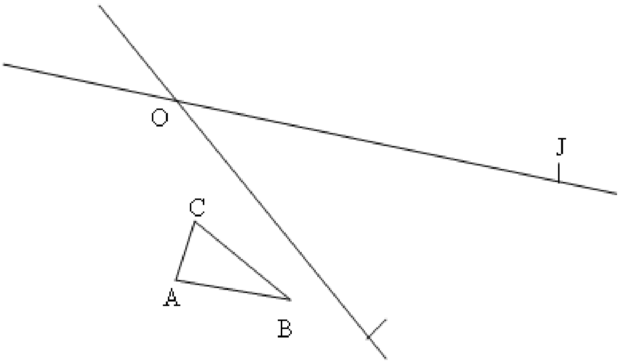


fig.4

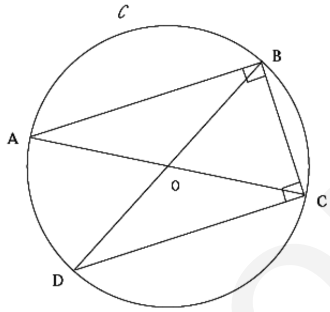


fig.5

Exercice 5

On considère un cercle *C* dont on ne connaît pas le centre. Pour déterminer ce centre, que l'on nomme O, on place les points A et B sur le cercle *C* puis, en utilisant uniquement une équerre non graduée, on construit les points C puis D.

1. Décrire les étapes de la construction du point O réalisée sur l'annexe (fig. 5).

2. Justifier que le point O obtenu par la construction proposée est bien le centre du cercle *C*.

3. Tracer le segment [AD], puis prouver que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

4. Pour cette question on suppose que le rayon du cercle *C* mesure 5 cm et que le quadrilatère ABCD est un carré.

a. Calculer la longueur AB puis en donner une valeur approchée au mm près.

b. Calculer l'aire de la partie du disque extérieure au carré ABCD puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.

5. **a**. Construire, sur la figure donnée, la figure image du rectangle ABCD par la symétrie orthogonale d'axe (AC).On laissera les traits de construction apparents et on repassera ce symétrique en couleur.

b. Démontrer que cette image du rectangle ABCD dans cette symétrie est un rectangle inscrit dans le cercle *C*.

© PariMaths.com