D14C. Autour des problemes du Champ Multiplicatif

Ce fichier, corrigé du fichier **D14**, aborde la résolution des problèmes du champ multiplicatif. La première partie fait le point sur la classification présentée dans le fichier associé D14. En seconde partie, nous étudierons les procédures utilisées pour résoudre des problèmes de proportionnalité en cycle 3. En fin de fichier, nous revenons sur la présentation d'une situation problème abordant ce thème.

Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

II. Représentation de problèmes multiplicatifs

Nous vous proposons ici quelques énoncés qui pourraient être proposés à des élèves de cycle 3. Caractérisez ces problèmes en référence à la classification précédemment présentée. Vous préciserez l'opération attendue sans l'effectuer.

P1. Lors des essais d'une course automobile, un pilote fait 15 tours sur un circuit de 7 km chaque tour. Quelle distance a-t-il parcourue ?

Proportionnalité simple avec présence de l'unité. Multiplication 15×7

P2. A la piscine un groupe de 15 élèves se relaient pour effectuer une course, en nageant chacun la même distance. La course se joue sur 750m. Quelle distance chacun doit-il parcourir?

Recherche de la valeur d'une part. Division partition : $750 : 15$

P3. Johann a 5€. Il va acheter des bonbons à 25centimes pièce. Combien peut-il en acheter ?

Recherche du nombre de parts. Division quotition et proportionnalité pour la conversion dans la même unité : $500 : 25$

P4. Un créateur fabrique des carnets reliés. Il dispose de 9 couleurs de spirales et de 12 papiers de couvertures. Combien de variétés différentes de carnets peut-il créer ?

Problème type combinatoire. Multiplication 12×9

P5. Trois copains ramassent des châtaignes. Le second en a ramassé trois fois plus que le premier, et le troisième deux fois moins que le second. Le premier, Léo, en a ramassé 42. Combien en ont-ils en tout ?

Problème de comparaison. 42×3, $(42 \times 3) : 2$

P6. Jeanne a acheté 4 gâteaux identiques pour 6€. Combien va-t-elle payer pour 10 gâteaux identiques?

Proportionnalité sans présence de l'unité. Quatrième proportionnelle. $(6 : 4) \times 10$

P7. A la kermesse, Maia a gagné 9 jetons au jeu d'équilibre, 14 jetons à une loterie et 6 jetons à la pêche à la ligne. Pour avoir un lot, il lui faut 12 jetons. Combien de lots vat-elle pouvoir choisir ?

Problème additif : $9 + 14 + 6 = 29$ Recherche du nombre de lots : quotition. $29 = 2 \times 12 + 5$

P8. Un fabricant de jouets expédie 35 cartons, chacun contenant respectivement 24boites de figurines. Combien de boites le client va-t-il recevoir ?

Proportionnalité simple avec présence de l'unité. Multiplication 35×24

P9. Dans un cinéma il y a 12 places par rangées. Quand il est plein, il peut contenir 216 personnes assises. Combien y a-t-il de rangées ?

Recherche du nombre de parts. Division quotition $216 : 12$

P10. Un arbre mesure 5,50m. Un autre arbre mesure le triple. Quelle est sa hauteur ?

Comparaison. Multiplication $5{,}5 \times 3$

III. Analyse de Travaux d'élèves[1]

Problème 1

L'énoncé suivant a été donné à des élèves de fin de cycle 3 :

"Avec un pot de 6kg, on peint une surface de 15m^2. Avec un pot de 10kg, on peint une surface de 25m^2. »

- Combien de m^2 peut-on peindre avec 16kg de peinture ?
- Combien de kg de peinture faut-il pour peindre 50 m^2 ?
- Combien de m^2 peut-on peindre avec 4kg de peinture ?

1. Quelle est la notion mathématique sous-jacente à l'énoncé ? Justifier.

Ce problème est un problème de proportionnalité simple entre deux grandeurs, la quantité de peinture et l'aire à peindre. En effet, les données, *Avec un pot de 6kg, on peint une surface de 15m^2. Avec un pot de 10kg, on peint une surface de 25m^2*, montrent que ces deux grandeurs varient proportionnellement car le rapport qui lie ces deux grandeurs est constant $\frac{15}{6} = \frac{25}{10} = 2{,}5$.

2. Répondre aux trois questions, en utilisant trois procédures distinctes que vous justifierez en explicitant les propriétés mathématiques utilisées.

Voici une proposition de réponse. D'autres sont acceptables…

Pour16kg de peinture : avec 6kg de peinture on peint *15m^2*, avec 10kg on peint 25*m^2*. Avec 16kg, on peut donc peindre $15 + 25 = 40m^2$. On utilise ici la linéarité additive de la proportionnalité :

$s(p_1) + s(p_2) = s(p_1 + p_2)$, où s est l'aire à peindre exprimée en fonction de la quantité p de peinture utilisée.

Pour peindre 50 m^2, qui est le double de 25 m^2, il faut $2 \times 10 = 20kg$ de peinture. On utilise ici la linéarité multiplicative de la proportionnalité $p(k \times s) = k \times p(s)$, où la quantité de peinture p utilisée est ici exprimée en fonction de la surface s à peindre, k étant un réel. Ici on utilise l'opérateur scalaire $\times 2$.

S'il faut 6*kg* de peinture pour peindre 15*m^2*. Avec 1kg de peinture, on pourra peindre $\frac{15}{6} = 2{,}5\, m^2$

[1] D'après Caen 1996 / Grenoble 2001

On détermine ici la fonction linéaire qui lie les deux grandeurs $s(p) = 2{,}5p$. Le coefficient de proportionnalité est de 2,5. On trouve alors $s(4) = 2{,}5 \times 4 = 10m^2$.

3. **Pour la troisième question, analysez la procédure de cet élève.**

15:3 = 5m² pour 5m² il faut 6:3 = 2 kilos
avec 4 kg on peut peindre 10 m²

Cet élève divise par 3, l'aire et la quantité de peinture associée. Puis il multiplie par 2, sans l'expliciter, la quantité de peinture et l'aire associée. Ces deux opérateurs sont des opérateurs scalaires.

Problème 2

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle des approfondissements. Chacun des élèves a eu un énoncé et a travaillé seul sur sa feuille. Le maître leur a précisé au préalable que les livres étaient tous identiques et que chaque paquet ne contenait qu'un livre.

> Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4m de papier. Pour emballer 25 livres, il faut 10m de ce papier.
> 1. Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14m de papier ?
> 2. Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?
> 3. Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6m de papier ?

1. Pour emballer un livre, le libraire utilise $4:10 = 0{,}40m = 40cm$ de papier. La quantité de papier étant la même à chaque emballage, elle est proportionnelle au nombre de livres utilisés. Le tableau ci-dessous présente ces données et les résultats associés. Ici le coefficient de proportionnalité l/n, égal à 0,4, a été utilisé pour tous les calculs, mais d'autres procédures sont valides, parfois utilisées plus spontanément en calcul réfléchi (mental) selon les valeurs numériques.

Si nous appelons L, la longueur de papier nécessaire et n le nombre de livres, $L(n) = 0{,}4n$ est une fonction linéaire. Réciproquement, si nous appelons N le nombre de livres et l la quantité de papier $N(l) = 2{,}5l$. Le coefficient de proportionnalité n/l est alors égal à 2,5.

$\times 2$

n	Nombre de livres	10	1	25	35	50	15
l	Longueur (m)	4	0,4	10	14	20	6

$\times 2{,}5$ $\times 0{,}4$

$\times 2$

2. Dans ces productions d'élèves, on relève trois types de procédure différents :

- une procédure qui s'appuie sur la propriété de linéarité additive de la proportionnalité. $L(n_1 + n_2) = L(n_1) + L(n_2)$, soit ici $L(n_1 + n_2) = 0{,}4n_1 + 0{,}4n_2$: Elèves A, B, C, D
- une procédure qui s'appuie sur la propriété de linéarité multiplicative de la proportionnalité, et les opérateurs en ligne, dits opérateurs scalaire $L(k \times n) = k \times L(n)$: Elèves B, D
- une procédure qui s'appuie sur le coefficient de proportionnalité entre deux quantités : Elève D.

Elève A

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

$10\,m + 4\,m = 14\,m$ 10 livres $+ 25$ livres $= 35$ livres

Il peut emballer 35 livres.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

$10+10+10+10+10 = 50$ $4\,m + 4\,m + 4\,m + 4\,m + 4\,m = 20\,m$

Il faut 20 m de papier.

L'élève A fait une décomposition additive de la première quantité donnée, la longueur (en *m*) de papier, $10m+4m=14m$ et $6m=2m+4m$, ou le nombre de livres, $50=10+10+10+10+10$

Il obtient ensuite la quantité cherchée en ajoutant les différentes quantités associées, livres ou mètres de papier. Les opérations sont posées en colonne. Les résultats sont justes.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

$4m\ 4m - 2m + 0 = 2m\ 4m$, $6m$ $10 - 5 = 5$

Il peut emballer 15 livres.

A la question 3, la soustraction faisant passer de 4m à 2m, et de 10 livres à 5 livres, laisse penser que cet élève a utilisé de manière implicite la notion de moitié, en associant 5 livres à *2m*.

Elève B

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

$10 + 4 = 14$ papier $25 + 10 = 35$ livres

Il lui faut 14m de papier

L'élève B fait aussi la décomposition additive de *14m*, et associe le nombre de livres associés à chaque terme. Il oublie le sens de la question posée dans sa phrase de conclusion.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

10 livres 10 livres 10 livres 10 livres 10 livres

Il faut 20 m de papier. $4\times5=20$

Pour la question 2, il décompose 50 livres en 5 lots de 10 livres. Il introduit une écriture multiplicative correspondant à 5 fois *4m,* utilisant ainsi la linéarité multiplicative. Son résultat est correct, mais le signe d'égalité est mal utilisé.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

$4 + 2 = 6$ $10 + 2 = 12$

Il faut 12 m de papier.

Pour la question 3, nouvelle décomposition additive de 6m, mais le nombre de livres associé comporte une erreur : il oublie de chercher combien on peut emballer de livres avec *2m* de papier et recopie le 2. La réponse est fausse, en valeur et en sens.

Elève C

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

$25+10=35$

Le libraire a put emballer 35 livre dans 14m de papier.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

Le libraire peut emballer avec 6 m de papier 15 livres.

$10=4m$ $5=2m$

$10+5=15$ livres

L'élève C utilise aussi la décomposition additive de la première quantité. Il explicite moins clairement les deux étapes.

Les réponses aux questions 1 et 3 sont justes, bien que les égalités écrites entre deux quantités de nature

Elève D

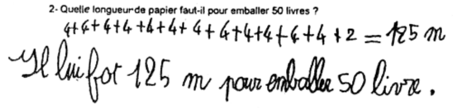
1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

4 m = 10 livres 10 m = 25 livres $4\,m + 10\,m = 14\,m$ donc : 10 livres + 25 livres = 35

avec 14 m de papier il peut emballer 35 livres.

L'élève D utilise la décomposition additive de la première quantité et cherche le nombre de livres correspondant. Sa réponse est correcte. Les opérations sont posées en colonne.

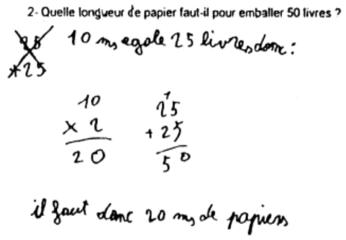
A la question 2, il utilise la linéarité multiplicative. Si on double une quantité, la deuxième quantité est doublée. Ainsi le nombre de livres étant doublé, la différente soient fausses.


2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+2 = 125 m
Il lui faut 125 m pour emballer 50 livre.

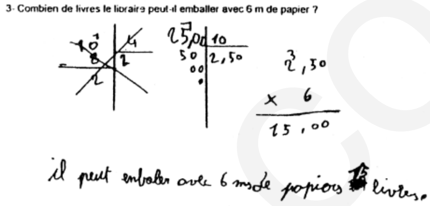
Pour la question 2, l'élève décompose 50 en 12 termes de 4, plus 2. Il confond en fait les deux quantités, fait la décomposition de *50m*, associe alors un nombre de livres correspondant $10\times12+5=125$, mais pense trouver des *m*. Il répond en fait à la question : « Combien peut-il emballer de livres avec 50m de papier ? ».

Sa réponse est donc fausse.

longueur de papier l'est aussi.


2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?
10 m, egale 25 livres donc :
10 × 2 = 20
25 + 25 = 50
il faut donc 20 m, de papiers

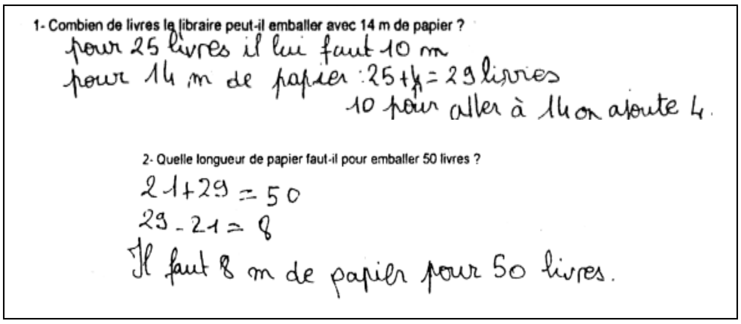
Une erreur de rédaction traduit une mauvaise maîtrise de l'égalité entre deux grandeurs de nature différente. Addition et multiplication sont posées en colonne.


3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?
2,50 × 6 = 15,00
il peut emballer avec 6 m de papiers 15 livres.

A la question 3, l'élève utilise la division pour trouver 2,5 en divisant 25 par 10. Il est difficile de donner du sens à cet opérateur dans ce contexte. Il correspond en effet au nombre de livres qui peut être emballé avec 1m de papier ! Curieusement il a interrompu la première division qui lui aurait donné le même résultat.

Cependant en multipliant ensuite par 6, l'élève retrouve bien le nombre de livres emballés avec *6m* de papier. On remarque ici les automatismes de calcul liés à la proportionnalité et à la fameuse règle de trois.

3. L'élève F utilise aussi la décomposition additive de la quantité de papier/de livres aux questions 1et 3/ 2, en pensant associer la quantité correspondante de livres/de papier. Mais il commet une erreur dans la propriété de linéarité additive de la proportionnalité. En effet, au lieu d'appliquer la propriété telle que nous l'avons déjà définie au début de ce corrigé, $L(n_1+n_2)=L(n_1)+L(n_2)$ et $N(l_1+l_2)=N(l_1)+N(l_2)$, cet élève applique $L(n_1+n_2)=L(n_1)+n_2$ et $N(l_1+l_2)=N(l_1)+l_2$.


1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?
pour 25 livres il lui faut 10 m
pour 14 m de papier : 25+4 = 29 livres
10 pour aller à 14 on ajoute 4.
2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?
21+29 = 50
29 - 21 = 8
Il faut 8 m de papier pour 50 livres.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

10 - 4 = 6
25 - 4 = 21
Avec 6 m de papier le libraire peut emballer 21 livres

Ainsi, dans la question 1, cet élève pense que si l'on ajoute 4 à la quantité de papier, il faut aussi ajouter 4 au nombre de livres. A la question 3, il enlève ainsi 4 aux deux quantités. A la question 2, la procédure est plus confuse. Il semble qu'une décomposition additive de 50 ait été tentée, suivie d'une confusion entre les quantités. La réponse n'a aucun sens.

Pour aider cet élève à comprendre son erreur, il faut redonner du sens aux procédures, en lien avec le contexte. Ainsi, l'enseignant peut le faire travailler sur un tableau de proportionnalité *en forçant* sa procédure vers l'absurde :

Nombre de livres	25	21	17	**15!!**
Longueur (*m*)	10	6	2	**0**

Peut-être sans comprendre la raison du non fonctionnement de sa procédure, l'élève peut déjà prendre conscience qu'elle est fausse, quand elle aboutit à couvrir 15 livres avec 0 mètre de papier !

Problème 3

Voici un exercice proposé à des élèves de CM2 et les réponses de 3 élèves. Ces réponses sont ici présentées dans un tableau. L'unité est le *km*.

Un automobiliste roule à une vitesse moyenne de 95km/h. Quelle distance va-t-il parcourir en 5 heures et demie ? En trois quarts d'heure ? En 3 heures 30 minutes ? En 50 minutes ?

1. Quels sont les deux principaux domaines mathématiques dont les connaissances sont nécessaires pour répondre à ces questions.

Ce problème relève donc du champ multiplicatif et plus particulièrement d'une situation de proportionnalité. La vitesse proposée étant moyenne, la distance parcourue est proportionnelle au temps mis à la parcourir. Il faut donc connaître les propriétés de la proportionnalité pour le résoudre. Par ailleurs, ce problème lie les unités de longueur, ici le *km,* qui fonctionnent dans le système décimal, et les unités de temps qui fonctionnent dans le système sexagésimal, qui pose souvent problème aux élèves et parfois même aux adultes ! Rappelons donc au préalable que $1h = 60\,\text{min}, soit\ {}^1\!/_2\, h = 30\,\text{min} = 0,5h$

Rappelons par ailleurs que $\text{Vitesse} = \dfrac{\text{Distance}}{\text{Temps}}$, soit $\text{Distance} = \text{Vitesse} \times \text{Temps}$, sous réserve d'une concordance des unités.

2. Résoudre ce problème.

Plusieurs procédures sont correctes pour résoudre ce problème. *Toutes sont acceptées du moment qu'elles sont valides. Utilisez celles qui vous parlent le plus* !

$5h \text{ et demi} = 5h + 0,5h = 5,5h$. La distance parcourue est donc de : $95 \times 5,5 = 522,5km$

En $\frac{1}{4}h$, la distance parcourue est de $95 : 4 = 23,75km$. En $\frac{3}{4}h$, la distance est $23,75 \times 3 = 71,25km$.

On peut aussi considérer que $\frac{3}{4}h = 45\min = 0,75h$. La distance parcourue est donc de $95 \times 0,75 = 71,25km$

$3h30\min = 3h + 0,5h = 3,5h$. La distance parcourue en $3h30$minutes est donc de $95 \times 3,5 = 332,5km$

En 60 minutes, la distance parcourue est de $95km$. En 50 minutes : $\frac{95 \times 50}{60} \approx 79,17km$

3. Pour chacune des productions d'élèves : analyser la ou les procédures utilisées. Valider ou non les résultats, et donner une explication possible dans le cas d'une réponse erronée

	Elève A	Elève B	Elève C
Pour 5 heures et demie, distance parcourue en *km*.	$95+95+95+95+95+(95:2)=522,5$	$95 \times 5,5 = 522,5$	$95 \times 5,5 = 522,5$
Pour trois quarts d'heure, distance parcourue en *km*.	$95:2=47,5 \quad 47,5:2=23,7$ Cela fait $71,2$	$\frac{95 \times 4}{3} = 126,6$	$95 \times 0,45 = 42,7$
Pour 3 heures 30 minutes, distance parcourue en *km*.	$95+95+95+(95:2)=332,5$	$95 \times 3,5 = 332,5$	$95 \times 3,30 = 313,5$
Pour 50 minutes, distance parcourue en *km*.	$95:2=47,5 \quad 47,5:2=23,7$ $23,7:2=11,8$ cela fait $47,5+23,7+11,8=83$	$\frac{95 \times 6}{5} = 114$	$95 \times 0,50 = 47,5$

L'élève A utilise globalement la même procédure qui s'appuie sur la propriété de linéarité additive de la proportionnalité. Il fait une décomposition additive de chaque durée, et cherche ainsi la distance associée. Ici la distance est une fonction linéaire du temps. Si ce temps t se décompose en $t_1 + t_2 + t_3$, alors la distance se décompose en $d(t) = d\ (t_1 + t_2 + t_3) = d(t_1) + d(t_2) + d(t_3)$.

Pour $5h$ et demie et pour $3h30$, il sait que la durée se décompose en un nombre entier d'heures et d'une moitié. Ses résultats sont justes.

Pour trois quarts d'heure et 50 minutes, il décompose la durée en divisant par 2 successivement. Cette division par 2, s'appuie sur la propriété de linéarité multiplicative $d(\frac{1}{2}t) = \frac{1}{2}d(t)$ … qui pourrait se traduire dans le tableau de proportionnalité ci-dessous. Ces opérateurs en ligne sont appelés opérateurs scalaires.

$:2$ $:2$ $:2$

T (*h*)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
D (*km*)	95	47,5	23,75	11,875

$:2$ $:2$ $:2$

Sa procédure est valide pour $\frac{3}{4}h$, égal à $\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h$, mais ne l'est pas pour 50 minutes, qui ne peut se décomposer en une somme de $\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h$, qui équivaut à $30\,\text{min} + 15\,\text{min} + 7{,}5\,\text{min} = 52{,}5\,\text{min}$.

Dans les deux cas, les divisions par 2 sont interrompues à la première décimale. Ses résultats sont faux.

L'élève B applique globalement une procédure multiplicative qui utilise le coefficient de proportionnalité, ici $d = 95 \times t$. Ces calculs pourraient trouver leur place dans ce tableau de proportionnalité :

T (*h*)	1	5,5	3,5	t
D (*km*)	95	522,5	332,5	$95 \times t$

$\times 95$

Pour ces deux calculs, les résultats sont justes.

Pour trois quarts d'heure et 50 minutes, il décompose la durée en fraction d'heure, mais il y a inversion de la fraction dans le calcul. En effet il divise par 3 et multiplie par 4, et de même divise par 5 et multiplie par 6. Ce peut être une erreur au moment du calcul avec confusion dans l'application de la propriété « Pour multiplier par $\frac{a}{b}$, on multiplie par a et on divise par b », ou une inversion de l'écriture fractionnaire de $\frac{3}{4}$ *et* $\frac{5}{6}$, écrits respectivement $\frac{4}{3}$ *et* $\frac{6}{5}$. Les deux résultats sont faux.

L'élève C applique une procédure multiplicative qui utilise le coefficient de proportionnalité, comme précédemment. La proportionnalité est bien prise en compte, mais les unités de temps ne sont pas bien maitrisées. Chaque durée est cette fois transformée dans le système décimal, mais seule la première durée est exacte et le résultat associé juste.

Pour les autres, il considère le nombre de minutes (45minutes, 30minutes, 50minutes), comme des centièmes d'heures, et oublie de prendre en compte le système sexagésimal du temps. Ces résultats sont faux.

En conclusion

Nous vous proposons un retour à la fiche S16 de la partie scientifique. Vous y trouverez des compléments sur les vitesses, les échelles, les pourcentages, les mesures de grandeurs.

La proportionnalité se rencontre dans différents cadres. Elle est fréquente dans beaucoup de problèmes de la vie courante et il y a souvent plusieurs procédures pour résoudre un même problème.

Ces différentes procédures s'appuient sur les propriétés de la fonction linéaire qui traduit la relation de proportionnalité entre deux grandeurs[2].

Qu'est-ce qu'une fonction linéaire ?

Soit a un nombre réel fixé. En associant à chaque nombre réel x un nombre défini par $a \times x$, noté $a\ x$ et appelé « image de x », on définit une fonction linéaire de coefficient *a*.

On notera cette fonction ainsi $f : x \longmapsto a\ x$. *L'image de x* est notée *f(x)= a x. On dira aussi que x est l'antécédent de f(x).* La fonction linéaire f traduit la relation de proportionnalité entre les deux grandeurs représentées par x et $f(x)$. Le nombre *a* est le coefficient de proportionnalité.

Compte tenu de cette définition, on retiendra deux propriétés de linéarité, la linéarité additive et la linéarité multiplicative. Ainsi pour tous réels x, y et k :

- d'une part $f(x+y) = f(x) + f(y)$ car $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
- d'autre part $f(kx) = k \times f(x)$ car $f(kx) = a \times kx = a \times k \times x = k \times ax = k \times f(x)$

Rappelons enfin que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

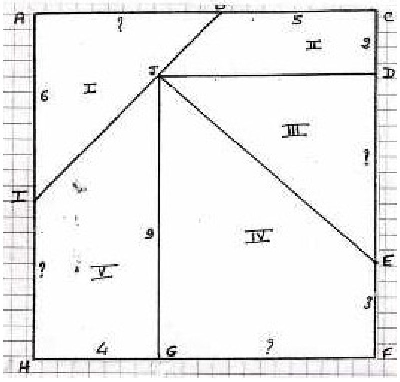
A titre d'exemple, si dans la vie courante, on sait que le prix d'un carnet de timbres est de 5,80€, le prix de trois, dix, vingt carnets sera respectivement trois, dix, vingt fois plus. On dit que le prix payé (première grandeur) est proportionnel au nombre de carnets achetés (seconde grandeur). Dans l'exemple des carnets de timbres, on peut alors généraliser et exprimer le prix payé P en fonction du nombre x de carnets achetés sous la forme $P(x) = 5{,}8x$. Le coefficient de proportionnalité $5{,}8$ permet de calculer le prix pour un nombre donné de carnets. Ainsi on paiera pour trois carnets $P(3) = 3 \times 5{,}8 = 17{,}4$ €, pour dix carnets : $P(10) = 10 \times 5{,}8 = 58$ €. Les propriétés de linéarité permettent de trouver par exemple, le prix de cinquante carnets : $P(50) = P(5 \times 10) = 5 \times P(10) = 290$ €, ou encore le prix de sept carnets : $P(7) = P(10) - P(3) = 58 - 17{,}40 = 40{,}60$ €.

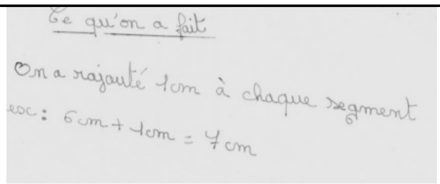
Les procédures les plus couramment utilisées sont en lien avec les propriétés citées : décomposition additive des grandeurs, opérateurs scalaires, coefficient de proportionnalité, passage par l'unité, égalité des rapports et égalité des produits en croix, règle de trois. Certains problèmes pourront trouver graphiquement leur résolution. Toute méthode valide est acceptable. L'enseignant/e veillera à ne pas instaurer une procédure systématique qui pourrait s'avérer peu efficace selon le contexte ou avec d'autres données numériques. Ainsi le tableau de proportionnalité, s'il a l'avantage de mettre en évidence les deux grandeurs, peut s'avérer inutile pour certains calculs.

Les principales s difficultés portent sur l'identification du type de problème, la référence aux deux grandeurs, le choix de procédure en fonction des données numériques et des variables choisies par l'enseignant, les pièges de certains mots inducteurs, la mise en œuvre de la procédure. La notion d'augmentation change ici de statut puisqu'elle n'est plus directement associée à une addition.

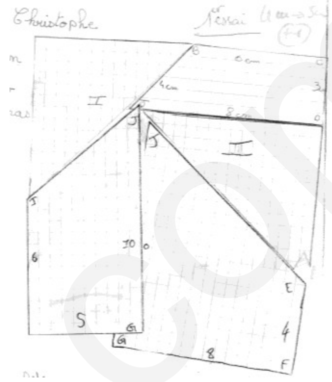
[2] Voir S14 fonctions linéaires et affines

Sur le plan didactique, **une très intéressante situation problème** peut-être proposée dans l'apprentissage de la proportionnalité, même si au départ, elle n'a pas été construite par les chercheurs en didactique à cette fin, mais pour introduire le nombre décimal en cycle 3. Il s'agit de l'agrandissement du puzzle[3].
L'enseignant/e propose aux élèves un puzzle de quelques pièces et leur demande de l'agrandir pour que, par exemple, *3cm* devienne *4cm*.





ce qu'on a fait : on a ajouté1cm à chaque segment : 6cm devient 7cm



Dans cet exemple proposé en début d'année en 6ème, les pièces sont découpées sur papier quadrillé pour ne pas parasiter l'objectif lié ici à un diagnostique sur la proportionnalité.
Dans ce premier temps, la plupart des élèves ajoute spontanément 1 à chaque dimension. Mais au moment de la reconstitution, il constate que le puzzle ne se reforme pas.
Dans un deuxième temps, on propose que *4cm devienne 8cm*. Pour tous les élèves, la multiplication par 2 est alors spontanée, et fonctionne. Le puzzle retrouve sa forme initiale agrandie.
Dans un troisième temps, on revient à des variables didactiques qui invitent au questionnement : *4cm devient 6 cm.* Certains ajoutent 2 et reviennent au point de départ, d'autres tentent de chercher un autre opérateur, hésite parfois entre 6/4 et 4/6, demande l'usage d'une calculatrice….
Cette situation à utiliser sans modération, demande une réflexion didactique de la part de l'enseignant. Il veillera à choisir une forme simple de figures en cycle 3. Un travail en groupe est judicieux pour les échanges, mais aussi pour gagner du temps dans le découpage, chaque pièce étant à la charge de chaque élève du groupe. Il reste important pour l'enseignant de bien choisir les variables didactiques proposées pour susciter la réflexion, ne pas souffler de procédure et laisser le temps à chacun de se confronter à ses erreurs.

[3] Cette situation présente dans Ermel, se trouve dans de nombreux manuels sous des formes diverses.