

D15C. Autour de la Division au Cycle 3

Ce fichier, corrigé du fichier **D15**, aborde l'apprentissage de la division au Cycle 3. Nous présentons en première partie, une séquence de manuel sur ce thème, en seconde partie, plusieurs productions d'élèves sur la technique de la division par un nombre à un, deux ou trois chiffres. En fin de fichier, vous trouverez les extraits des documents d'accompagnement des programmes 2008 sur ce thème.

☞ *Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.*

I. Analyse d'une séquence d'apprentissage sur la division¹ (Manuel MATH EN FLECHE CE2²).

1. L'apprentissage de la division commence-t-il en CE2 ?

Cet apprentissage peut être proposé dès le cycle 2, à travers des problèmes de partage ou de distribution. Ils sont d'ailleurs proposés dès la maternelle, même si bien évidemment on ne parle pas de division. En cycle 2, l'enseignant veillera à laisser aux élèves le choix de leur procédure, sans vouloir mettre en place un vocabulaire spécifique ou une méthode performante. Un partage d'objets entre quatre personnes est l'occasion de laisser s'exprimer des initiatives (distribution 1-1, distribution par paquets aléatoires ou organisés...) et aussi de donner du sens au reste quand un partage équitable n'est pas possible.

2. Ecrire les relations qui définissent la division euclidienne d'un nombre entier naturel a par un nombre entier naturel b ($a > b$)

a et b étant deux entiers naturels, avec b non nul, il existe un entier naturel q unique et un entier naturel r unique vérifiant : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$. Cette égalité, que nous signalerons par ce code*, est caractéristique de la division euclidienne, où q est le quotient euclidien de a par b , et r est le reste de la division euclidienne. Le quotient euclidien peut aussi être caractérisé par la relation** : $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$ qui met en évidence l'encadrement du produit.

¹ Toulouse 2000

² Collection DIAGONALE, Editions NATHAN 2000

3. Décrire les quatre étapes suivies dans cette progression sur la division, à travers les quatre annexes. Vous caractériserez les différents types de problèmes proposés.

Chaque annexe correspond à une étape de la progression.

A1 : L'apprentissage démarre par la résolution d'un **problème de quotition** c'est-à-dire « en a combien de fois b ? ».

1-1  Pour son anniversaire, Audrey a invité quelques amis.
Elle a acheté un paquet de 82 papillotes.

Pour distribuer ces papillotes à ses invités, elle veut confectionner des petits sachets.
Elle pense mettre 12 papillotes par sachet.

Pour prévoir le nombre de sachets qu'elle pourra faire, elle commence ce schéma :



La procédure utilisée consiste en une approche de a par deux multiples consécutifs de b . l'encadrement du dividende est effectif. Elle est schématisée par une droite graduée à partir de 0, et des pas de valeur b . Il s'agit de compter de b en b jusqu'à atteindre le nombre a à partager. La notion de reste est naturellement évoquée dans le contexte des groupements, présents dans les problèmes de cette annexe.

On peut noter qu'un seul des problèmes de cette annexe porte sur la recherche de la valeur d'une part (exercice 3 : problème de partition). Les autres problèmes 1.4, exercices 2 et 4, sont des problèmes de quotition.

3  Des écureuils se partagent des noix.
Ils en veulent autant chacun et le plus possible. Complète le tableau.

nombre de noix	nombre d'écureuils	calcul	part de chacun	reste
49	4	$49 = (4 \times 12) + 1$	12	1
55	5	_____	_____	_____
176	10	_____	_____	_____
_____	6	_____	13	10
_____	_____	$100 = (7 \times 14) + \text{_____}$	_____	_____

A2 : Toutes les situations sont des **situations de partage équitable**, avec recherche de la valeur d'une part (**problème de partition**). La procédure utilisée consiste à retrancher successivement le nombre b au nombre a , autant de fois que possible, jusqu'à ce que le reste soit inférieur au diviseur (b). Le quotient est égal au nombre de soustractions effectuées.

A3 : La résolution des problèmes porte ici sur des problèmes des deux types : **partition** (exercice 2) et **quotition** (activité, exercice 4, exercice 5). La division est identifiée comme procédure de résolution, quotient et reste sont définis. Des procédures sont présentées sous la forme de productions d'élèves. On peut reconnaître **une approche par multiples consécutifs** (Anna) de type ajustement, **une méthode par soustractions successives** (Nicolas) avec comptage simultané des groupements obtenus, une méthode mixte (Ronald) s'approchant de la technique opératoire avec **soustractions organisées de multiples de b** calculés mentalement (10 fois b).

A4 : Cette étape est consacrée à la présentation d'une **technique opératoire de la division** qui va optimiser la procédure de Ronald consistant à organiser la recherche ainsi que le calcul des multiples du diviseur soustraits au dividende. **La liste des multiples de b** est spécifiquement écrite (table des 7), permettant d'en déduire de nouveaux multiples par **la règle du zéro** ($\times 10$, $\times 40$, $\times 50$), un encadrement permet de cibler **l'ordre de grandeur du quotient** (entre 40 et 50).

Les soustractions successives sont présentées en colonne dans un tableau, ainsi que le nombre de groupements (semaines ici) en parallèle.

nombre de jours		nombre de semaines	Tu peux disposer tes calculs autrement.	
3 0 0			3 0 0	7
- 2 8 0	→	4 0	- 2 8 0	4 0
2 0			2 0	40 × 7 = 280
- 1 4	→	+	- 1 4	2
6		4 2	reste 6	2 × 7 = 14
				4 2
				quotient

$300 = (42 \times 7) + 6$
 Dans 300 jours, il y a 42 semaines et 6 jours.
 Tu as calculé 300 divisé par 7.

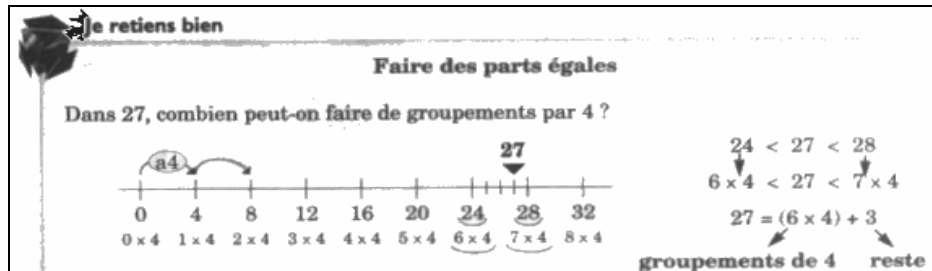
Le passage à **la puissance** est un « codage » de la présentation de cette démarche. On peut remarquer que pour l'instant, le quotient ne se calcule pas directement. Il est encore le résultat de groupements obtenus successivement à chaque étape de distribution (soustractions), et ces résultats sont présentés en colonne. Le quotient final est obtenu par addition. Le problème proposé est un problème de partition (exercice 2).

4. Les divers résumés « Je retiens bien » correspondent-ils selon vous aux relations proposés en question 1? Justifier.

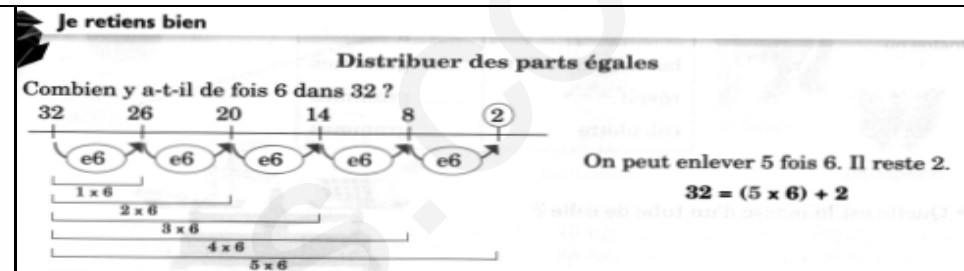
Dans les quatre résumés, la relation $a = b \times q + r$ est clairement nommée. Par contre la condition sur le reste $r < q$ n'est jamais explicite.

La relation $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$ est présente dans les encadrements du dividende par deux multiples successifs. Le terme *quotient* n'est nommé que dans les annexes 3 et 4.

Dans l'annexe 1, la représentation de la droite graduée par pas de 4, permet d'approcher le dividende (27) et de l'encadrer par deux multiples consécutifs les plus proches** $6 \times 4 < 27 < 7 \times 4$. Cette graduation est expliquée par le codage *a4*, ajouter 4, pour construire la liste des multiples de 4. La notion et le terme de *reste* sont introduits par l'égalité $27 = 6 \times 4 + 3$. Le terme *quotient* est remplacé par un retour au contexte de la situation, faire des parts égales.



Annexe 1

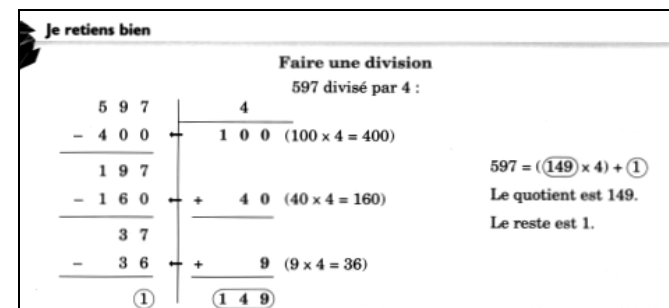
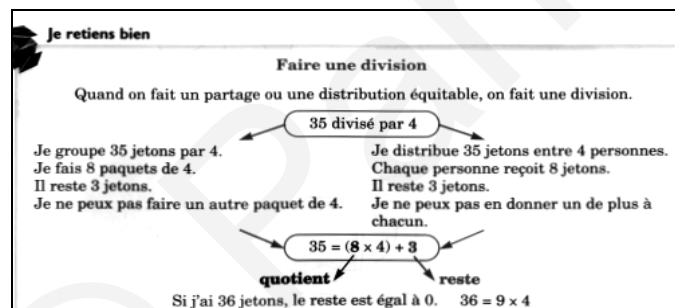


Annexe 2

Dans l'Annexe 2, la distribution en parts égales est ici représentée sur une droite graduée à partir du dividende (32) par le codage *e6*, enlever 6. Il met en évidence une approche par procédure soustractive, présente dans la technique de la division visée dans la suite.

Dans l'Annexe 3, le résumé reprend les deux aspects de la résolution de problème : *quotition* illustrée par la situation de distribution (recherche du nombre de paquets) et *partition* illustrée par la situation de partage (recherche de la valeur d'une part). Le sens du reste est lié au contexte du problème, ainsi que l'encadrement** par les phrases *je ne peux pas donner/faire un de plus...* Les deux termes sont explicites.

Dans l'Annexe 4, l'égalité* est la traduction du résultat de l'opération posée en potence. La technique laisse apparaître les calculs intermédiaires, les soustractions sont écrites. Le quotient est décomposé en colonne, à chaque étape un retour au sens, en lien avec la numération, est fait. Les deux termes sont nommés.



5. Pour l'annexe 2, le livre du maître conseille de ne pas donner le livre aux élèves dans un premier temps mais de copier le texte au tableau jusqu'à « le nombre de glaces que chacun aura pendant les vacances. » afin de résoudre la situation. Quel est l'intérêt de cette démarche ? Justifier.

Rédiger deux solutions, différentes de celle du livre, que pourraient donner les élèves.

Le livre présente une procédure de résolution. Le fait de ne pas donner le livre aux élèves permet de les laisser libres du choix de leurs procédures.

La complexité de l'énoncé peut amener les élèves à une représentation personnelle de la situation avant de se lancer dans une procédure de calcul.

Voici deux autres solutions possibles (il y en a d'autres acceptables) que pourraient donner les élèves pour distribuer les glaces, sachant que « *après chaque goûter il y a 6 glaces en moins* ».

1 **Activité**

Mamie garde ses six petits-enfants pendant les vacances. Comme ils sont gourmands, elle fait une provision de petits pots de glace.

Elle achète : – 3 boîtes de 12 pots à la fraise,
– 2 boîtes de 16 pots à la vanille,
– 1 boîte de 20 pots à la pistache.

Dès le premier jour, les enfants mangent un pot chacun au goûter.
Le plus jeune en veut un deuxième. Ses cousins ne sont pas d'accord.
Le plus grand déclare :
« Après chaque goûter, il y a 6 glaces de moins. Si chacun en prend plusieurs par goûter, on n'en mangera pas longtemps ! Pour qu'il n'y ait plus de dispute, je vais calculer le nombre de glaces que chacun aura pendant les vacances. »



Solution 1

L'élève calcule d'abord combien de glaces sont disponibles pour les vacances : $3 \times 12 = 36$, $2 \times 16 = 32$, $36 + 32 + 20 = 88$. Puis il compte de 6 en 6 jusqu'à s'approcher le plus possible de 88 : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84. Il dénombre alors le nombre de fois 6 dans 84 : 14 fois.

Il pourra donc y avoir 14 distributions de glaces, tout parfum confondu. Il en restera 4 (88-84).

Solution 2

L'élève peut penser à une distribution par sorte de glaces et par boîtes. Il y a 3 boîtes de 12 pots de fraise, 2 boîtes de 16 pots à la vanille, 1 boîte de 20 pots à la pistache. Chacun des six enfants aura :

Fraise : 2 pots à la fraise par boîte puisqu'il y en a 12 par boîte. Chaque enfant aura donc 6 pots à la fraise puisqu'il y a 3 boîtes. Il ne reste rien. Les 36 glaces à la fraise peuvent aussi être partagées globalement : $6 \times 6 = 36$

Vanille : par boîte, $16 - 6 = 10$, $10 - 6 = 4$ ou $16 = 6 \times 2 + 4$, chaque enfant reçoit 2 pots de vanille par boîte, soit 4 pots. Il reste 4 pots dans chaque boîte, soit 8 pots. Chaque enfant peut donc recevoir un pot de plus, soit 5 pots à la vanille. Il reste 2 pots. Les 32 glaces à la vanille peuvent aussi être partagées globalement : $6 \times 5 + 2 = 32$

Pistache : par soustractions successives $20 - 6 = 14$, $14 - 6 = 8$, $8 - 6 = 2$. Chaque enfant aura **3** pots. Il reste 2 pots. Les 20 glaces à la pistache peuvent aussi être partagées globalement : $6 \times 3 + 2 = 20$

Au total, chaque enfant pourra manger 14 glaces, il restera 4 pots.

6. Expliquer, analyser et commenter les procédures de calculs utilisées par Nicolas, Anna et Ronald dans l'Annexe 3.

calculs de Nicolas			
5 6 2			
- 4 5	→	1	
5 1 7			
- 4 5	→	+ 1	
4 7 2			
- 4 5	→	+ 1	
4 2 7			
- 4 5	→	+ 1	
			2

calculs de Ronald			
Ronald observe les calculs de ses camarades et dit : « J'ai fait comme Nicolas, mais j'ai enlevé 450 d'un coup. Ça fait 10 colliers. Les calculs sont plus rapides ! » Je trouve bien comme Anna : 12 colliers, il reste 22 perles.			
5 6 2	1 1 2	6 7	
- 4 5 0	- 4 5	- 4 5	
1 1 2	6 7	2 2	
(10)	+	(1)	+
		(1)	= 12

calculs d'Anna			
4 colliers	$45 \times 4 = 180$		pas assez
8 colliers	$45 \times 8 = 360$		pas assez
10 colliers	$45 \times 10 = 450$		pas assez
14 colliers	$45 \times 14 = 630$		trop !
12 colliers	$45 \times (12) = (540)$		pas assez
13 colliers	$45 \times (13) = (585)$		trop !
$540 < 562 < 585$ $45 \times 12 < 562 < 45 \times 13$			
Il faut 12 fermoirs.			
Il restera $562 - 540 = 22$ perles.			

Procédure de Nicolas : Nicolas utilise les *soustractions successives*. Ces soustractions sont présentées en colonne, avec en parallèle, le décompte du nombre de groupements (colliers ici). Cette procédure est très proche de la situation manipulée de 'distribution' par paquets de 45 ; elle aura ses limites dès que les nombres deviennent plus grands. C'est bien cette limite qui amènera à trouver une procédure plus efficace, du type de celle de Ronald.

Procédure de Ronald : La procédure de Ronald optimise le calcul des *multiples du diviseur* à soustraire au dividende. Il soustrait ainsi directement 10 fois 45 (450), puis ajuste avec successivement deux fois 45. Les soustractions successives sont présentées en colonne, le comptage et le calcul additif des colliers sont indiqués en dessous. Cette procédure prépare bien à l'algorithme qui est utilisé dans la technique opératoire de la division posée.

Procédure d'Anna : Anna encadre le dividende (562) par deux multiples consécutifs du diviseur, qu'elle détermine par essais successifs.

Cette recherche de *multiples consécutifs* approchant le dividende se retrouve dans la technique de la division à chaque étape quand on se pose la question « en 26 combien de fois 4 ? ». On cherche dans la table de 4 le multiple le plus proche de 26, soit $4 \times 6 = 24$ $5 \times 6 = 30$.

Par ailleurs on utilisera l'encadrement du dividende par deux multiples (non consécutifs cette fois, mais de rangs consécutifs) pour trouver l'ordre de grandeur du quotient $12 \times 10 < 562 < 12 \times 100$. Le quotient de 562 par 12 est compris entre 10 et 100, il aura donc deux chiffres.

II. Analyse de Travaux d'élèves³

A. Le chiffre 1 du quotient amène à compléter la ligne 2 dans la division.

Soit d et u les deux autres chiffres du quotient. Leur produit par 275 peut prendre les valeurs suivantes : $1 \times 275 = 275$ $2 \times 275 = 550$ $3 \times 275 = 825$

$4 \times 275 = 1100$ $5 \times 275 = 1375$ $6 \times 275 = 1650$ $7 \times 275 = 1925$ $8 \times 275 = 2200$ $9 \times 275 = 2475$

A la ligne 4, le chiffre des centaines est 6. On constate qu'il n'y a qu'un multiple de 275 comportant un 6 au rang des centaines (1650) qui correspond à la valeur 6 pour d . De même la ligne 6 correspond au produit de 275 par u . Le chiffre des dizaines étant 5, il ne peut s'agir que de 550, correspondant à la valeur 2 pour u .

Il ne reste ensuite qu'à effectuer $275 \times 162 + 3$ pour trouver le dividende qui est égal à 44553. On complètera ensuite les différentes étapes de la division.

$\begin{array}{r} \cdot \cdot 5 \cdot \cdot \\ - 275 \\ \hline \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \\ - \cdot 6 \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ - \cdot 5 \cdot \cdot \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \cdot \cdot 5 \cdot \cdot \\ - 275 \\ \hline \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \\ - 1650 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ - \cdot 5 \cdot \cdot \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \cdot \cdot 5 \cdot \cdot \\ - 275 \\ \hline \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \\ - 1650 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ - 550 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 44553 \\ - 275 \\ \hline \cdot \cdot 0 \cdot \cdot \\ - 1650 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ - 550 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 44553 \\ - 275 \\ \hline 1705 \\ - 1650 \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ - 550 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 44553 \\ - 275 \\ \hline 1705 \\ - 1650 \\ \hline 553 \\ - 550 \\ \hline 3 \end{array}$
---	--	--	--	---	---

B. En janvier 1996, les élèves d'une classe de CM2 ont fait un *concours de divisions*. Il s'agissait de faire vite et bien des divisions euclidiennes.

1. La procédure utilisée par l'élève A se déroule selon les étapes suivantes :

- L'encadrement du dividende permettant de déterminer le nombre de chiffres du quotient (4) qu'elle symbolise par le tableau de numération au quotient.
- La réalisation d'un répertoire des multiples de 123.
- L'application de l'algorithme de la division de deux entiers, en mentionnant les soustractions intermédiaires. Elle trouve le quotient et le reste exacts.
- La vérification du résultat par le produit du quotient par ... Elle commet là une erreur puisqu'elle multiplie par le reste au lieu du diviseur

$\therefore 123 \times 1000 < 123456 < 123 \times 10000$
 le quotient a 4 chiffres.

M	C	D	U
1	0	0	3

je vérifie

$$\begin{array}{r} 123456 \\ - 369 \\ \hline 087 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1003 \\ \times 87 \\ \hline 7021 \\ 8024 \cdot \\ \hline 87261 \end{array}$$

³ D'après Créteil 1996 ; Créteil 1997 ; Rouen 1999

2. Analysez les productions d'élèves en précisant pour chacune d'elles l'exactitude du calcul et des résultats, ainsi que la nature des erreurs éventuelles.

L'élève B fait une première erreur en traitant le dividende comme la juxtaposition de 123 et de 456. Elle oublie donc de traiter le rang des centaines et le rang des dizaines successivement, avant de traiter le rang des unités qui se traduit par « En 456 combien de fois 8 ? ». Elle poursuit son erreur en poursuivant sa division au delà du reste 197. Ce type d'erreur montre qu'elle ne donne pas de sens au rang des chiffres dans l'écriture du nombre, malgré le tableau qui apparaît au quotient. D'autre part elle fait une erreur de calcul et de retenue dans la soustraction (456 - 369). Les multiples sont exacts.

$$\begin{array}{l} 2 \times 123 = 246 \\ 4 \times 123 = 492 \\ 3 \times 123 = 369 \end{array} \quad \begin{array}{r} 123 \ 456 \\ 456 \\ 197 \\ 74 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & M & C & D & U \\ \hline 1 & 3 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 123 \times 5 = 615 \\ 123 \times 3 = 369 \\ 123 \times 4 = 492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 123 \ 456 \\ 456 \ (-123) \\ 067 \ (-369) \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & M & C & D & U \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123 \ 456 \\ 123 \ 000 \\ \hline 456 \\ 369 \\ \hline 85 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & D & U & & \\ \hline 1 & 3 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123 \ 456 \\ - 123 \\ \hline 456 \\ - 369 \\ \hline 127 \\ - 123 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & D & M & C & D & U \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & \end{array}$$

L'élève C traite aussi le dividende comme la juxtaposition de 123 et de 456 et commet le même type d'erreur sur le chiffre des centaines (3) du quotient. Il complète le quotient avec des 0 sur les deux chiffres restants, traitant 67 comme le reste final. Il fait une erreur de calcul dans la soustraction (456 - 369). L'élève D traite aussi le dividende comme la juxtaposition de 123 et de 456. Il fait une erreur dans l'ordre de grandeur du quotient (deux chiffres au lieu de quatre). Cependant le chiffre 1 du quotient est bien traité comme étant au rang des milliers puisque le produit de 1 par 123 est traduit par 123000. La notation du tableau et l'association du 1 au rang des dizaines, souligne une contradiction et montre que son sens n'est pas assimilé.

Il fait une erreur de calcul dans la soustraction (456 - 369).

L'élève F fait une erreur dans l'ordre de grandeur du quotient (cinq chiffres au lieu de quatre). Il traite correctement les chiffres 0 du rang des milliers et des centaines, et le chiffre 3 des unités. Une erreur de calcul dans le produit de 3 par 123 l'amène à trouver un reste (127) supérieur au diviseur. Cela induit pour lui de continuer la division, sans donner de sens au rang auquel il se trouve.

Remarques : On constate, dans ce contexte de division, que l'écriture d'un *tableau de numération* peut être réalisée par les élèves sans qu'ils ne donnent du sens aux chiffres du quotient inscrit dans ce tableau. Il semble aussi que ce tableau soit réalisé au fil de la division et non en amont comme trace de l'ordre de grandeur préalablement réfléchi. Enfin on constate que le reste est difficilement interprété par certains élèves et que sa valeur, supérieure au diviseur, induit de continuer la division plutôt que de remettre en cause le chiffre trouvé au diviseur.

C. Voici des productions d'élèves extraites de livrets d'évaluation à l'entrée de la 6^{ème}.

1. Citez deux compétences que l'on peut évaluer ici

Ces productions étant extraites de livrets d'évaluation à l'entrée de la 6^{ème}, la division a déjà été travaillée en CM et il s'agit ici de faire un diagnostic des acquis sur la technique opératoire de la division euclidienne de deux entiers. Parmi les compétences qui peuvent être évaluées:

- Savoir trouver le quotient euclidien d'un entier par un nombre à deux chiffres.
- Savoir appliquer l'algorithme de la division euclidienne.
- Savoir trouver le reste dans une division euclidienne, inférieur au diviseur.
- Savoir évaluer l'ordre de grandeur du quotient d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à deux chiffres
- Connaître ses tables de « division » (multiplication à trous)

2. Décrire les différentes étapes de l'algorithme appliqué par l'élève B. Vous préciserez ses réussites et ses erreurs éventuelles.

Elève A	Elève B	Elève C	Elève D
$\begin{array}{r} 2782 \\ 26 \overline{) 182} \\ \underline{182} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2782 \\ 26 \overline{) 182} \\ \underline{182} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2782 \\ 26 \overline{) 182} \\ \underline{182} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2782 \\ 26 \overline{) 182} \\ \underline{182} \\ 0 \end{array}$

L'élève B a une maîtrise experte de la technique de la division euclidienne. Il n'a pas besoin de poser les soustractions successives, ni les répertoires des multiples de 26. L'ordre de grandeur est exact. On peut décrire cette procédure par étapes successives :

En 27, combien de fois 26 ?.... 1 fois, reste 1... Abaisse le '8'

En 18, combien de fois 26 ? ... 0 fois, reste 18... Abaisse le '2'

En 182, combien de fois 26 ?... 7 fois... Reste 0

On peut noter que le quotient nul de 18 par 26 est bien traité, ainsi que de bonnes performances en calcul mental pour effectuer directement les calculs intermédiaires.

3. Relever les erreurs commises dans les autres productions et essayer de les expliquer.

L'élève A fait une erreur dans le quotient de 18 par 26, en oubliant de noter le chiffre 0 des dizaines au quotient. Son chiffre des unités, faux, donne un reste supérieur au diviseur à la dernière étape, sans que l'élève n'en fasse cas.

L'élève D fait la même erreur dans le quotient de 18 par 26. Le chiffre 0 des dizaines au quotient est oublié. Les autres étapes sont correctes.

L'élève C se trompe dès le début en divisant 2 par 2. Le codage présent souligne cette procédure. Il continue sa division en divisant par 2, sans prendre en compte le chiffre des unités du diviseur. Il ne semble pas avoir compris le sens de la division par un nombre à deux chiffres. Le codage global présent au dessus des deux nombres est réalisé par automatisme, mais ne donne pas de sens au calcul réalisé. On peut juste noter que la division par 2 est correcte.

D. Dans le cadre de l'Evaluation Nationale d'entrée en sixième⁴, il a été proposé aux élèves d'effectuer, sans calculatrice, la division euclidienne de 4 584 par 8. Décrivez pour chaque élève les procédures utilisées pour effectuer la division proposée. Caractérisez les erreurs éventuelles et proposer une aide à ces élèves.

Elève I	Elève J	Elève K
$ \begin{array}{r} 1 \times 8 = 8 \quad 80 \quad 800 \\ 2 \times 8 = 16 \quad 160 \quad 1600 \\ 3 \times 8 = 24 \quad 240 \quad 2400 \\ 4 \times 8 = 32 \quad 320 \quad 3200 \\ 5 \times 8 = 40 \quad 400 \quad 4000 \\ 6 \times 8 = 48 \quad 480 \\ 7 \times 8 = 56 \quad 560 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4584 \overline{) 8} \\ \underline{4000} \\ 0584 \\ \underline{0560} \\ 024 \\ \underline{024} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4584 \overline{) 8} \\ \underline{3999} \\ 584 \\ \underline{560} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4584 \overline{) 8} \\ \underline{40} \\ 58 \\ \underline{56} \\ 24 \end{array} $

L'élève I commence par dresser la table des 8, diviseur de cette division. Il liste aussi les multiples de 80 ainsi que les multiples de 800, en prévision des calculs intermédiaires. Il prend ainsi en compte implicitement la notion d'ordre de grandeur de chaque rang. Ainsi dès le début, il sait que 5 est à l'ordre des centaines et effectue $500 \times 8 = 4000$ pour le soustraire à 4584. Les autres étapes sont correctes. Quotient et reste sont justes.

L'élève J commet dès la première étape une erreur en ne prenant pas en compte le quotient de 45 par 8. Il connaît le résultat de $8 \times 9 = 72$ et va le soustraire de manière répétée à chaque étape. Il est probable que cet élève ait considéré que 9 est le plus grand nombre de fois qu'on peut inscrire à chaque ordre du quotient.

⁴ Rouen 1999
Parimaths.com

L'élève K démarre correctement, mais commet une première erreur de table dans la multiplication de 6 par 8, puisqu'il inscrit 46 au lieu de 48. Le reste obtenu 12 est supérieur au diviseur, ce qui ne semble pas le gêner pour poursuivre. Cependant il ne conclut pas sur le reste à la dernière étape, peut-être car ayant anticipé le nombre de chiffres au quotient, il réalise que ce reste entrainerait une suite. Peut-être aussi oublie-t-il de conclure.

Il serait intéressant de proposer à ces deux élèves d'utiliser un répertoire des multiples de 8, soit en le dressant, soit avec une table disponible. On peut imaginer de demander l'ordre de grandeur du quotient de 4584 par 8. Il y a donc trois chiffres au quotient car $500 \times 8 < 4584 < 600 \times 8$

Par ailleurs ils commettent des erreurs sur les rangs à chaque étape. Il faut donc redonner du sens à la décomposition du dividende en milliers, centaines, dizaines et unités. En repartant d'une situation de partage, telle que la situation Ermel⁵ des pirates, l'élève comprendra qu'il faut partager 4584 pièces en 8 lots. On peut alors décomposer 4584 en $4000 + 400 + \dots$ en choisissant des multiples simples que l'élève connaît.

Par exemple : $4584 = 4000 + 400 + 184 = 8 \times 500 + 8 \times 50 + 8 \times 20 + 8 \times 3$. L'élève peut alors inscrire son quotient par étape : $500 + 50 + 20 + 3 = 573$

Pour plus de performance, on peut aussi redonner du sens à la décomposition du dividende en énonçant l'algorithme en précisant chaque rang :

4M partagés en 8 : 0M

45C partagés en 8 : 5C, il reste 5C

58D partagés en 8 : 7D, il reste 2D

24U partagés en 8 : 3U, il reste 0U.

En conclusion

Les programmes 2008

Dans ces programmes, l'apprentissage de la division commence au Cycle 2 par la résolution de problème. Au cycle 3, la technique opératoire se met progressivement en place, sans chercher l'expertise.

CE1 : Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements. Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier).

CE2 : Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.

CM1 : Division euclidienne de deux entiers. Division décimale de deux entiers.

⁵ Apprentissages numériques CE2, CM1 Hatier.
Parimaths.com

CM2 : Division d'un nombre décimal par un nombre entier

Une situation problème très bien construite, est proposée par Ermel⁶, succès garanti !

La division est introduite à partir du partage d'un trésor entre plusieurs pirates. Dans une première phase, la distribution de 1355 pièces d'or entre 8 pirates amène à la technique opératoire telle qu'elle est présentée ci-dessous. On peut remarquer que dans un premier temps (CM1, vers l'algorithme), la distribution est notée en colonne (100, 20, 40, 9), y compris sous la potence, sans chercher à l'optimiser.

1	3	5	5	1	0	0			1	3	5	5	8		
	5	5	5		2	0			-	8	0	0	1	0	0
	3	9	5		4	0				5	5	5			
		7	5			9			-	1	6	0		2	0
			3							3	9	5			
									-	3	2	0		4	0
											7	5			
									-		7	2			9
												3			
														1	6
														9	

« Feuille de partage »

Partager réellement une somme de 4122€ sous la forme 4 billets de 1000 €, 1 billet de 100 €, 2 billets de 10 €, 2 pièces de 1 € entre 3 personnes.

Partage	Donner à chacun	Reste	Monnaie
4M	1M	1M	10C
11C	3C	2C	20D
22D	7D	1D	10U
12U	4U	0	

Passage à la disposition usuelle (CM2)

M	C	D	U			M	C	D	U		
8	5	6	3	7		8	5	6	3	7	
-	7			1M		-	7	0	0	1	2
	1	5					1	5	6	3	M C D U
-	1	4		2C		-	1	4	0	0	
		1	6					1	6	3	
-		1	4	2D		-		1	4	0	
			2	3					2	3	
-		2	1	3U		-		2	1		
			2						2		

En CM2, un changement de variable va amener à un changement de procédure. Ainsi les pièces sont remplacées par une somme, en pièces et billets, ce qui va permettre de passer à une décomposition du nombre dans le système décimal. Le quotient sera lui aussi décomposé dans la numération décimale et progressivement présenté en ligne.

Le travail sur le sens de cette technique opératoire est poursuivi, par la **recherche de l'ordre de grandeur du quotient** en amont de l'algorithme, par la construction des **registres des multiples du diviseur**, par l'écriture des **soustractions successives**, par le retour à l'égalité caractéristique de la division euclidienne, par le sens à donner au **quotient et au reste**. Le vocabulaire « dividende » et « diviseur » reste aussi à institutionnaliser.

⁶ Apprentissages Numériques. Hatier
Parimaths.com