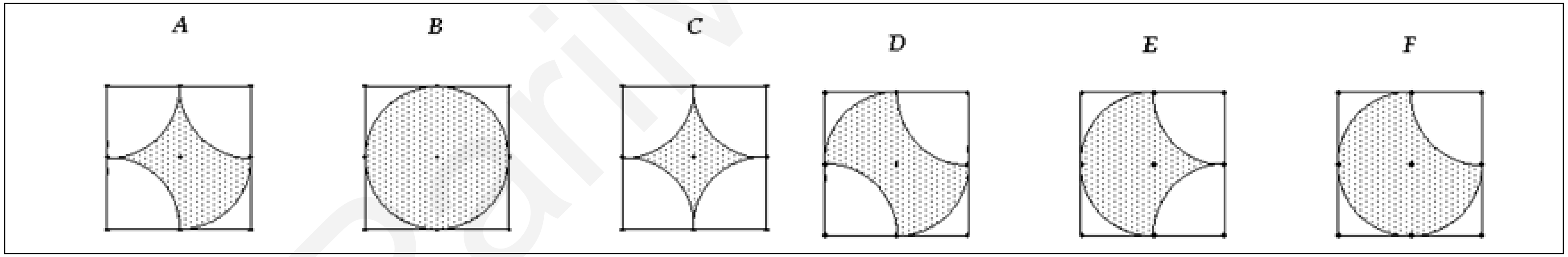
D19C. Autour de la Mesure et des Grandeurs

Ce fichier, corrigé du fichier **D19**, aborde le vaste domaine des Mesures et Grandeurs abordé dès le cycle 2 avec la mesure de longueurs. Nous vous présentons ici une activité de comparaison d'aires et de comparaisons de périmètre au cycle 3, deux notions souvent confondues au long de l'apprentissage qui se poursuit au collège. Dans la seconde partie, des productions d'élèves sur la mesure de masses vous sont proposées.

Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

Aire et Périmètre[1]

A. Un enseignant de CM2 décide de conduire des activités de mathématiques autour du matériel ci-dessous : il s'agit de surfaces planes limitées par des arcs de cercle et inscrites dans des carrés de même dimension. Il est sous-entendu que les centres et les rayons des arcs de cercle pourront être déterminés sur le matériel par les élèves. Le matériel usuel de géométrie est mis à leur libre disposition.



Question 1 : Dans un premier temps, l'enseignant veut faire ranger ces différentes surfaces selon leur aire.

[1] D'après Toulouse 99 / Dijon Reims 2005

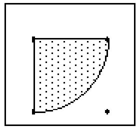
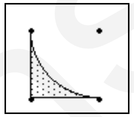
Catherine Marchetti-Jacques
Digitally signed by Catherine Marchetti-Jacques
DN: cn=Catherine Marchetti-Jacques, o=PariMaths.com, ou, email=info@parimaths.com, c=FR
Date: 2014.04.24 11:13:05 -06'00'
© PariMaths.com

1. Sans utiliser d'unités d'aires, un élève peut réaliser ce rangement que vous préciserez. Décrire dans le détail une façon possible pour cet élève de procéder.

L'élève peut regarder la figure B, la plus complète. En enlevant progressivement une partie à cette figure, l'élève va pouvoir obtenir le classement des figures selon leurs aires. Il peut aussi imaginer la superposition et la rendre effective s'il peut utiliser du papier calque.

Il peut ainsi trouver que l'aire de B est supérieure à l'aire de F, puis l'aire de E ou l'aire de D, puis l'aire de A, puis l'aire de C. La comparaison des deux aires D et E est plus difficile du fait du positionnement différent des parts complémentaires ; celui-ci oblige à imaginer leur déplacement et rend la superposition moins parlante.

2. L'enseignant fait le choix de faire utiliser des unités de mesure. Pour cela il propose deux unités de mesure Q et S[2] et demande d'exprimer les mesures des aires des différentes surfaces en utilisant ces unités.

Q.  S. 

a. Décrire la figure B. Comment décririez-vous les deux surfaces d'aires respectives Q et S.

La figure B est un disque inscrit dans un carré. On peut préciser que le rayon du disque est alors la moitié du côté du carré. La première unité Q représente l'aire du quart de disque. La deuxième unité S est plus complexe à décrire. Il faut imaginer ce carré, le quart de disque inscrit comme sur Q ; l'unité S est alors l'aire de la surface complémentaire au quart de disque dans ce carré. (NDLR : On remarque ici la difficulté que peut avoir l'enseignant à décrire avec précision ces « objets mathématiques » sans faire d'erreur entre surface et aire, entre disque et cercle).

b. Quelles sont les réponses correctes attendues pour les aires des différentes surfaces ?

L'élève peut observer les surfaces grisées et les décomposer en les pavant avec Q et S. Il peut aussi observer les parties blanches, complémentaires de la figure, composées de surfaces ayant pour aires les unités proposées par l'enseignant et visibles directement. Le tableau ci-dessous récapitule d'une part l'aire obtenue directement sur les parties grisées, et d'autre part l'aire de ces parties complémentaires de chaque figure. Plus les surfaces blanches sont importantes, plus l'aire de la figure grisée est faible.

Figures	A	B	C	D	E	F
Aire des figures grisées	$a=1Q+3S$	$b=4Q$	$c=4S$	$d=2Q+2S$	$e=2Q+2S$	$f=3Q+1S$

[2] NDLR : l'échelle peut paraître différente mais ces unités ont bien été définies avec les mêmes mesures que celles des figures précédemment présentées (rayon, côté du carré).

© Parimaths.com

Aire des parties complémentaires (blanches)	$3Q+1S$	$4S$	$4Q$	$2Q+2S$	$2Q+2S$	$1Q+3S$

c. L'enseignant demande alors aux élèves d'effectuer le rangement en leur précisant que $Q>S$. Effectuez ce rangement en le justifiant.

On peut constater que chaque aire est composée de 4 unités d'aire, représentées par Q et/ou par S. La plus grande est 4Q. A chaque fois qu'on remplace 1Q par 1S, l'aire obtenue diminue puisque $Q>S$. On obtient alors $4Q>3Q+1S>2Q+2S>1Q+3S>4S$

On peut donc énoncer le classement suivant $b>f>d\ \geq e>a>c$. *L'écriture* $B>F>D\ \geq E>A>C$ *est incorrecte puisque ce sont des figures (ou des surfaces) et non des aires. Par ailleurs, l'écriture des inégalités successives ne permet pas d'écrire l'égalité de d et de e. On peut juste se contenter du signe d'inégalité large que ne connaissent pas les élèves de l'école. Ils devront donc rédiger leur réponse par une phrase.*

Question 2 : **Dans un deuxième temps, l'enseignant va demander de comparer les périmètres des différentes surfaces.**

1. Quelle est la réponse spontanée et erronée qui sera vraisemblablement fournie par un bon nombre d'élèves ? Pourquoi ?

Spontanément les élèves (et peut-être certains adultes) répondront que le classement est le même, appliquant des conjectures fausses : *plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand, ou encore à aires égales, périmètres égaux !*

Le dessin des figures par la représentation de leur contour amène en partie cette confusion. Ici, la surface est coloriée ce qui facilite la représentation de l'aire, mesure de la surface. Parallèlement, elle dissimule davantage le périmètre, mesure de la longueur du contour. Lors du travail sur le périmètre, il est intéressant de demander aux élèves de repasser en couleur le contour de la figure en réfléchissant, comme dans le cas proposé, comment évaluer la mesure de sa longueur.

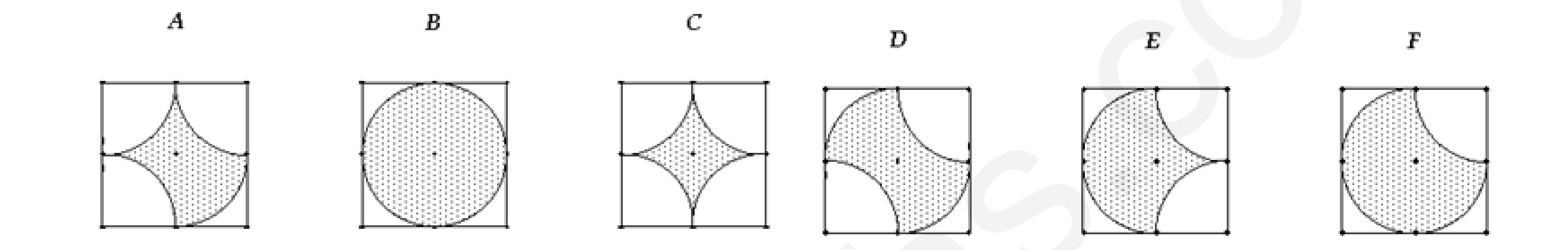
Cependant cette fausse conjecture est aussi amenée par l'évocation d'une forme de base, telle un carré ou un disque, dont l'aire et le périmètre augmentent si on agrandit le côté ou le rayon ! Les deux diminuent conjointement si on les diminue… Certains adultes non avertis pensent même qu'il peut y avoir proportionnalité sur les deux !!

2. L'enseignant propose alors aux élèves de comparer aire et périmètre des figures B et C. Justifier son choix.

Pour contrer cette conjecture fausse, l'enseignant demande de comparer les périmètres des figures B et C qui ont respectivement la plus grande et la plus petite aire. De plus la comparaison de leurs formes, sur le plan du dessin géométrique, est facilement visualisable et facile à décrire oralement. (NDLR : un programme de construction rédigé demandera plus de rigueur, qui n'est pas l'objectif recherché ici). Les élèves pourront énoncer que la figure B a été obtenue en traçant un cercle

© PariMaths.com

ayant pour centre le centre du carré. Certains évoqueront peut-être le disque inscrit dans un carré, mais le disque n'est pas du programme de l'école... La figure C est obtenue en traçant respectivement 4 quarts de cercle ayant pour centre les sommets respectifs du carré. Les deux figures B et C sont donc formées des 4 quarts de cercles de même rayon. Le quart de cercle peut ainsi être évoqué, et peut servir d'unité pour calculer le périmètre de ces figures. Ces figures ont donc même périmètre, 4 fois la mesure de la longueur du quart de cercle.



3. Proposez une procédure simple, pouvant être utilisé par les élèves pour effectuer cette comparaison. Quelle est la réponse correcte attendue ?

Les élèves viennent d'évoquer la mesure de la longueur du quart de cercle comme unité de mesure pour le périmètre. On peut la nommer L. Pour comparer les périmètres des autres figures, les élèves ont à observer les figures et constater qu'elles sont toutes formées de 4 quarts de cercle, tous de même rayon. Le périmètre de chacune d'elle vaut donc 4L. Ces six surfaces, dont les aires sont différents ont le même périmètre.

Question 3

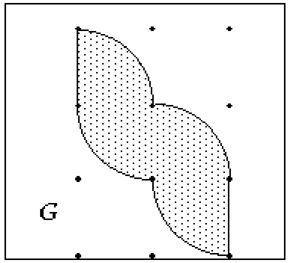
L'enseignant demande alors aux élèves s'il est possible de dessiner une figure ayant la même aire que la figure B, avec un périmètre différent.

a. Quel est son objectif ?

L'enseignant veut montrer aux élèves l'autre conjecture fausse, *même aire même périmètre*, en donnant un exemple illustrant que deux figures peuvent avoir la même aire et deux périmètres différents.

b. Donnez une réponse possible en expliquant votre démarche. Vous prendrez 2cm comme rayon du quart de cercle.

La figure B est formée de 4 quarts de disque. Pour ne pas changer l'aire, il faut alors les positionner autrement que dans le disque B. Voici une façon de les positionner.



Cette figure est composée des 4 quarts de disque, donc a pour aire 4Q. Parallèlement, cette figure est délimitée par 4 quarts de cercle et deux rayons r. Son périmètre est donc supérieur à celui du cercle entier, comme dans la figure B. Son périmètre mesure $4L+2r$. D'autres positionnements sont possibles.

Question 4 : **Quel était l'objectif spécifique de l'enseignant qui a proposé cette séquence de trois activités ?**

L'enseignant a pour objectif de construire la notion d'aire et de périmètre associée à une figure. En choisissant des activités de comparaison, il travaille la représentation de ces deux notions.

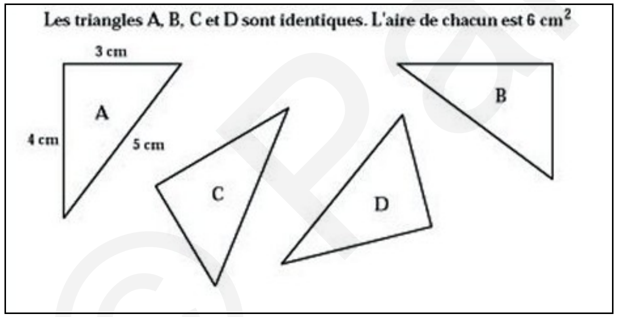
D'autre part, l'enseignant veut amener les élèves à dissocier ces deux notions et comprendre que deux figures de même aire peuvent avoir des périmètres différents, deux figures de même périmètre peuvent avoir des aires différentes.

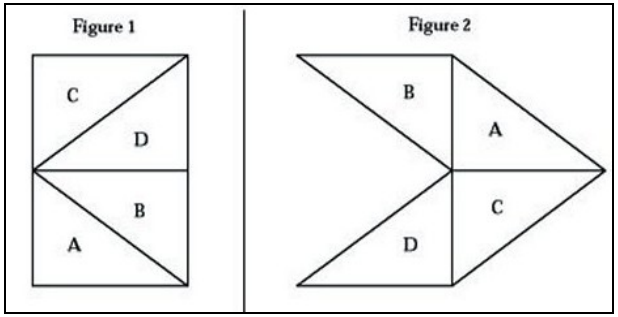
Enfin, il travaille la notion de mesure avec l'introduction des unités de mesure et le pavage de ces figures par ces unités.

B. Analyse de travaux d'élèves

Ce document a été distribué à des élèves. Dans les annexes officielles, les mesures effectuées sur la photocopie donnée aux élèves correspondent aux résultats utilisés par les élèves. Il est demandé aux élèves d'écrire les calculs permettant de trouver :

a. le périmètre de la figure 1 b. l'aire de la figure 1 c. le périmètre de la figure 2 d. l'aire de la figure 2.





1. Quelle est la règle implicite utilisée par l'élève A ?

a/ $(3+5+4) \times 4 = 48$ cm .

L'élève A multiplie par 4 le périmètre du triangle A pour trouver celui de la figure 1, composée de 4 triangles isométriques à A. Il applique un théorème en acte, vrai pour les aires, faux pour les périmètres. En effet l'aire de la figure 1 est bien égale à 4 fois l'aire du triangle A.

2. Explicitez les connaissances sur lesquelles s'appuie l'élève B pour répondre aux questions a et c, puis celles qu'il utilise pour les questions b et d.

a/ $(3,2+4,8) \times 2 = 16$

c/ $3,2+4+4+3,2+4+4 = 22,4$

b/ $3,2 \times 4,8 = 15,36$

D/ A et C on le met dans le trou entre B et D on obtiendra la même figure que la précédente, alors c'est la même aire = 15,36

Pour calculer les périmètres, l'élève 2 applique la formule du périmètre du rectangle pour la figure 1, ajoute les mesures des longueurs des six côtés pour la figure 2. Il sait ce qu'est un périmètre. Par contre il n'utilise pas les données de l'énoncé et effectue des mesures sur le dessin. Pour calculer les aires, il applique la formule connue de l'aire du rectangle pour la figure 1, toujours à partir des résultats de ces mesures. Pour la figure 2, il associe l'aire de la figure 2 à celle de la figure 1, en « découpant » et « déplaçant » les deux triangles A et C. Il sait que le découpage-recollage de sous parties d'une figure complexe ne change pas l'aire, s'il n'y a ni chevauchement ni superposition.

3. Interpréter la non-réponse en d) de l'élève C.

L'élève C a bien calculé l'aire de la figure 1 en appliquant la formule de l'aire du rectangle aux données de l'énoncé. Par contre il ne sait pas comment calculer l'aire de la figure 2 car il n'a pas de formule à sa disposition.

b) $6 \times 4 = 24$

d) je ne sais pas calculer

© PariMaths.com

4. Donner deux interprétations possibles pour chacune des réponses b) et d) de l'élève D.

L'élève D effectue deux fois le même calcul qui donne la bonne réponse. Son calcul pour la figure 1 est correct, il correspond à la formule de l'aire du rectangle. Pour la figure 2, il a pu constater (comme l'élève B) qu'en déplaçant A et C on peut reconstituer le rectangle et donc obtenir la même aire Son calcul traduit le fait que la figure 2 est composée de 4 triangles de 6cm². Il aurait alors calculé mentalement l'aire d'un triangle, en le considérant par exemple comme la moitié d'un rectangle de dimensions 3cm et 4cm.

b) 6x 4 =24	d) 6x 4 = 24

5. Au vu des productions de l'élève E, quelles connaissances a-t-il des notions de périmètre et d'aire ?

a) (3,2 x 2)+(4,8x2) = 6,4+9,6 = 16	b) 9,6x6,4 = 61,44

L'élève E effectue le calcul du périmètre en ajoutant les deux largeurs et les deux longueurs. Sa conception est correcte, mais il mesure sur la figure qui lui est donnée au lieu d'utiliser les données de l'énoncé. Pour l'aire du rectangle, il commet une erreur puisqu'il multiplie les deux largeurs par les deux longueurs.

C. Analyse de travaux d'élèves sur la mesure de masses[3]

On a proposé à des élèves de fin de cycle 3 le texte de problème suivant :

On met un chat pesant 4,6 kg sur les plateaux d'une balance. Combien faut-il mettre de souris pesant chacune 200g sur l'autre plateau pour équilibrer la balance ?

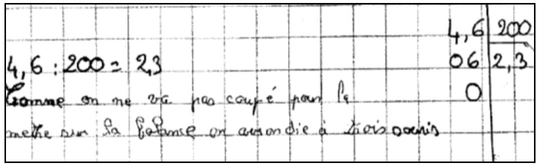
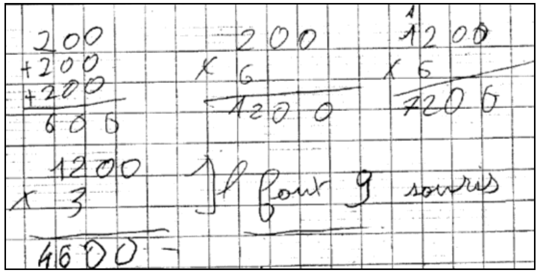
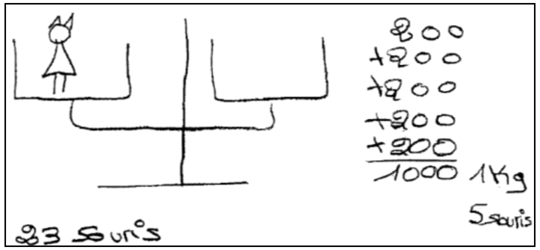
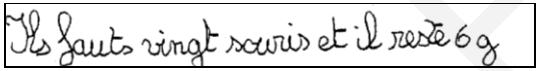
1. Quelles sont les connaissances nécessaires pour résoudre ce problème dont vous analyserez la nature?

Ce problème aborde la notion de masse. Il fait appel à des connaissances concernant les unités de masse et les conversions entre grammes et kilogrammes. Il sollicite aussi des connaissances concernant les nombres décimaux et éventuellement les opérations dans cet ensemble de nombres. D'autre part c'est un problème de division-quotition : Combien de fois 200g dans 4,6kg ? Il peut se résoudre soit par division, les élèves ayant vu cette opération en fin de cycle 3, soit par procédure personnelle compte tenu du contexte de mesure de masse.

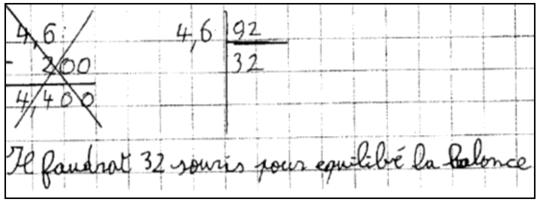
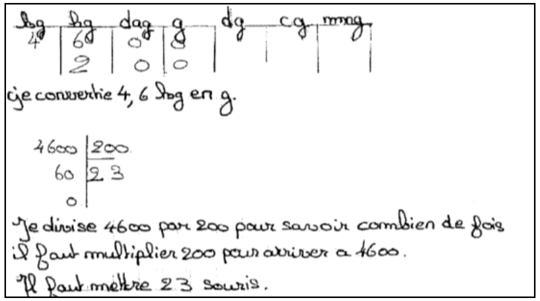
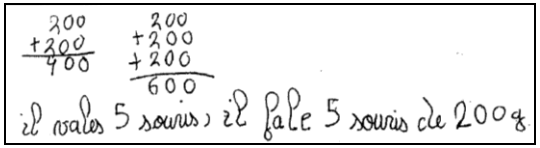
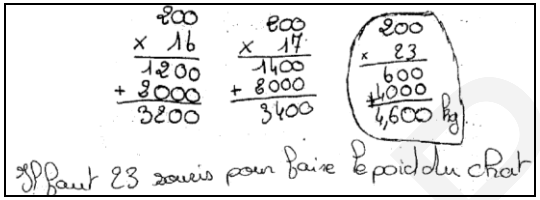
[3] Aix 2003

© ParMaths.com

2. Pour chaque production, étudier la procédure utilisée, en relevant les qualités et en analysant les erreurs éventuelles. Vous présenterez votre étude et analyse dans un tableau.

Elève / Procédures	Analyse de la procédure/réponse	Analyse des erreurs
Elève 1 	Le problème est bien identifié comme relevant d'une division. La division de 4,6 par 200 est posée, et reprise en ligne sans conversion des unités. Le résultat trouvé (2,3) est arrondi à l'entier, l'élève prenant en compte le contexte du nombre de souris cherché.	L'élève divise 4,6 par 200 sans tenir des deux unités présentes dans cet énoncé. Par ailleurs, au lieu de diviser par 200, l'élève divise 4,6 par 2 (sans erreur), sans doute car il ne sait pas diviser un nombre par un nombre plus grand. Cet élève ne prend pas en compte l'ordre de grandeur des unités, et ne donne pas de sens aux masses respectives, ce qui induit une réponse fausse.
Elève 2 	L'élève s'efforce d'approcher 4600, dans un premier temps par additions successives de 200, puis par calcul de plusieurs multiples de 200. Il conclut par addition des 'multiplicateurs' en se perdant dans sa démarche. L'approche du dividende par recherche de multiples successifs du diviseur est une procédure préalable à l'algorithme de la division. Le sens du problème est compris, la conversion des unités de masse juste.	La conclusion est fausse. Si la procédure est correcte, elle est mal organisée et mal interprétée. L'erreur provient d'un mauvais traitement de la liste des multiples de 200 : les multiplicateurs 3 et 6 sont ajoutés au lieu d'être multipliés (associativité de la multiplication $(200\times 6)\times 3 = 200\times(6\times 3)$) Par ailleurs, il y a une erreur de calcul dans le dernier calcul où le résultat devrait être 3600.
Elève 3 	Représentation figurée du contexte. La décomposition additive de 1kg en en cinq fois 200g, permet de trouver une réponse partielle. Sans doute une procédure de calcul mental permet de trouver le nombre de souris total. L'élève connaît la correspondance entre 1kg et 1000g. La réponse finale est juste, ce qui laisse penser qu'il a traité le problème en passant par les grammes, donc en travaillant sur les nombres entiers.	Il n'y a pas d'erreur. *Le dessin ne sert pas vraiment à la résolution du problème. L'approche par décomposition additive reste une procédure qui peut s'avérer longue avec d'autres données.*
Elève 4 	Pas de procédure visible. Sans doute une procédure de calcul mental permet de trouver le nombre de souris pour 4kg. Par contre le reste 6 montre une mauvaise compréhension des données de masse et des nombres décimaux. Au vu du reste énoncé, la notion d'équilibre de la balance n'est pas respectée donc le problème mal compris.	Le reste 6 montre une mauvaise compréhension des données de masse et des nombres décimaux. L'élève décompose *4,6kg* en *4kg et 6g*. La valeur du chiffre des dixièmes n'est pas correctement associée aux unités de masse de la partie décimale. En conséquence, l'élève ne traite le problème que sur la partie entière. On peut aussi noter les fautes d'orthographe.

© Parimaths.com

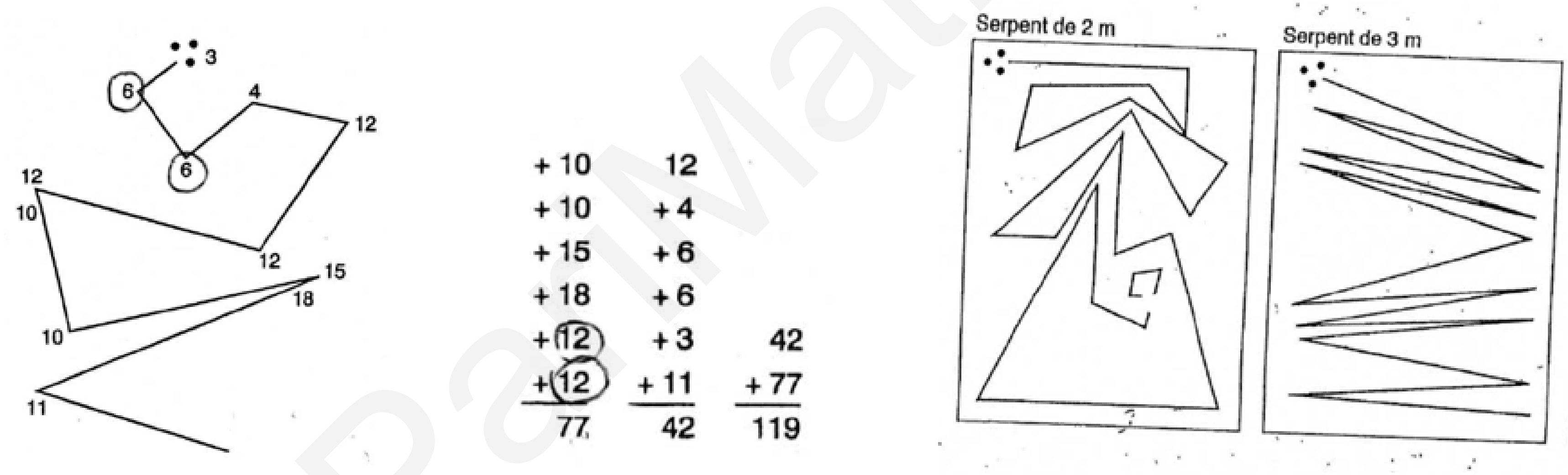
Elève 5 	Le problème est bien analysé. La première tentative barrée fait penser à une procédure par soustractions successives que l'élève abandonne au profit de la procédure plus experte de division posée de 4,6 par 0,2. Les conversions sont correctes pour opérer sur la même unité. On voit que dans la soustraction, le nombre 200 est placé en bonne place, bien qu'il n'ait pas été converti. La phrase réponse montre une bonne interprétation du résultat.	Une erreur de calcul dans la division montre que l'algorithme de la division n'est pas maitrisé. L'élève l'applique en commençant par le chiffre de droite et divise 6 par 2, puis 4 par 2, et de ce fait trouve le résultat de 6,4 divisé par 0,2. Aucune étape n'apparaissant dans cette division posée, on peut se demander si l'élève a une bonne maitrise des décimaux ou s'il n'a pas effectué 64 diviser par 2 en faisant abstraction des virgules…
Elève 6 	La présence du tableau de conversion permet de convertir 4,6kg en grammes sans erreur. Le problème est bien identifié comme un problème de division. La division de 4600 par 200 est posée, et l'explication donne du sens à la notion de quotition présente dans ce problème. La réponse est correctement rédigée et juste, la démarche est explicitée.	
Elève 7 	L'élève procède par additions successives de 200. Sa réponse mentionnant 5 souris fait penser qu'il semble vouloir approcher 1kg, en le décomposant en 400g + 600g, mais il n'a pas poursuivi sa procédure. L'équilibre de la balance n'est donc pas pris en compte. La réponse est donc fausse.	Les données du problème ne sont pas prises en compte complètement. Ce qui est fait est correct mais la procédure interrompue ne permet pas de savoir si c'est par manque de temps (procédure par essai longue) ou par incapacité de gérer les données du problème (unités, décimaux). On peut noter les fautes d'orthographe et d'expression grammaticale.
Elève 8 	L'élève procède par recherches successives de multiples de 200. Il tente de trouver un multiple de 200 qui soit égal à 4600. Cette procédure est un préalable à la technique de division. Elle est correcte, même si elle peut s'avérer longue. L'élève passe de 17 à 23. On peut penser que les autres calculs ont été faits mentalement en ajoutant 200 à la vue des premiers résultats 3200 et 3400. L'élève prend bien en compte toutes les données du problème, il travaille simultanément en grammes et en kilo, mais ne respecte pas les égalités dans les étapes de calcul.	*Pas d'erreur dans ces essais mais la procédure gagnerait à être organisée avec le passage à la dizaine :* $200\times 10, 200\times 20$ Une erreur d'écriture dans le résultat de la multiplication : le passage direct de 4600g à 4,6kg est incorrect.

Pour conclure

Le domaine des Grandeurs et des Mesures à l'école est un vaste domaine d'expérimentation. Les activités de découverte et de recherche doivent permettre aux élèves de donner du sens à ces notions nouvelles du domaine des Sciences, et ce au-delà de l'aspect calculatoire qui sera abordé en exercices. C'est ainsi l'occasion de proposer dès le cycle 2 diverses activités : jeu de pétanque, jeu de marchande, équilibre des balances, classement des silhouettes selon leur taille, lancer de poids….

La résolution de problèmes concrets contribue à consolider et à donner sens aux connaissances et aux capacités visées. La mesure de longueurs, puis leur calcul amènent à la notion d'estimation et d'ordre de grandeur. La connaissance des unités légales du système métrique et leurs conversions se fait progressivement au cours du cycle.

La situation du serpent, décrite dans Ermel[4], amène les élèves à travailler sur des longueurs : mesurer un serpent représenté sur une feuille, tracer un segment de longueur donnée (longueur supérieure à *1m*). L'activité, au-delà d'acquérir de l'habileté pour mesurer, introduit le calcul, et aide à se construire une représentation mentale, ici de *1m* sous différente formes, et l'équivalence avec 100cm.

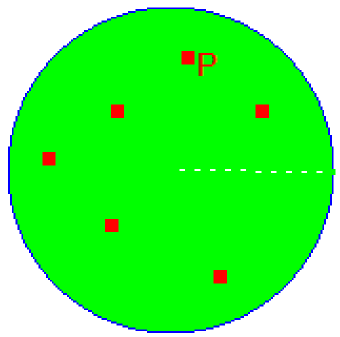


(NDLR : La reproduction n'est pas à l'échelle. Cette production comporte des erreurs)

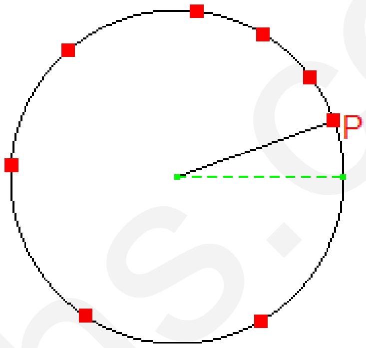
[4] Apprentissages numériques, Hatier

© Parimaths.com

Les notions de périmètre d'un polygone et d'aire sont introduites. Pour aider à la représentation de ces deux notions souvent confondues, il est intéressant de proposer des situations permettant de leur associer des images mentales évocatrices.



Poney broutant dans un pré



Poney se déplaçant à la longe autour du pré

En introduction aux activités de mesure, les aires sont travaillées par pavage à l'aide d'une surface de référence, ou d'un réseau quadrillé, lors d'activités de classement et de comparaison. Les formules du périmètre du carré et du rectangle, de la longueur du cercle, ainsi que la formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle sont à connaître en fin de cycle. Il en est de même du volume du cube et du pavé droit.

Cet apprentissage trouvera aussi sa place dans des projets interdisciplinaires variés, toujours propices à mobiliser les élèves et à susciter leur intérêt. Nous n'en citerons que quelque uns, observés dans des classes : autour des recettes (masse, contenance, proportionnalité), autour des drapeaux (aires, périmètres, formes), autour du temps (sablier, calendrier, horloge), autour des mobiles (longueur, masse), autour des maquettes (longueur, aire)….

© PariMaths.com