D1C. Autour de la RESOLUTION DE PROBLEMES a l'ecole

Ce document D1C, corrigé du fichier **D1**, est fait pour vous accompagner dans vos premières analyses de travaux d'élèves. Vous en trouverez tout au long des autres fichiers et thèmes étudiés. Les problèmes ouverts présents ici laissent la place à l'initiative des élèves, aucune méthode experte de résolution n'étant attendue. Laissez donc aussi place à votre initiative dans la découverte de ces premiers travaux d'élèves. Ne cherchez pas la performance à cette étape, les capacités d'analyse s'acquièrent pas à pas.

Au préalable, nous vous conseillons vivement la lecture du document **E. Résolution de problème à l'école**, traitant de l'apprentissage par résolution de problème à l'école. Il peut vous apporter des compléments utiles à l'éclairage des compétences en jeu dans ce domaine, et aussi élargir votre point de vue sur le sujet.

Les réponses apportées ici ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.

En conclusion de ce fichier, une aide méthodologique à retenir pour la préparation au concours.

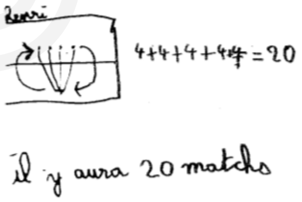
I. Résolution de problème en Cycle 3. ANNEXE A

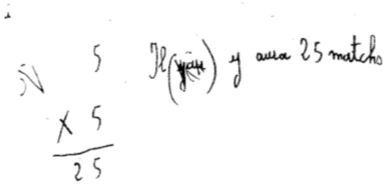
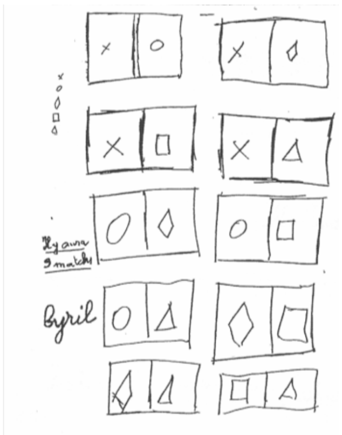
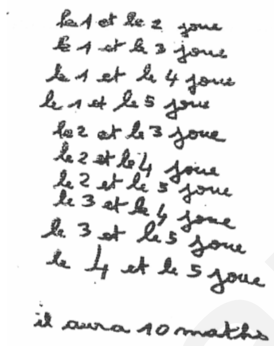
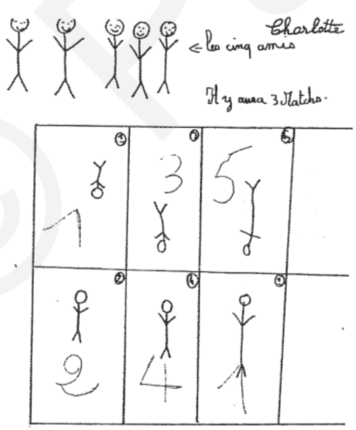
« Cinq amis décident d'organiser un tournoi de tennis. Ils doivent tous se rencontrer une fois. Combien de matchs faudra t'il organiser ? »

1. Résoudre ce problème avec la méthode de votre choix. Justifiez votre réponse.

La réponse correcte est 10 matchs. Il y a 5 joueurs. Chaque joueur rencontre 4 adversaires successivement. Cependant chaque rencontre ne doit être comptabilisée qu'une seule fois dans le dénombrement, le match A contre B étant le même que celui de B contre A. Il n'y a donc pas 20 matchs joués mais seulement 10.

2. Analyse pour chaque production d'élève la procédure mise en œuvre et la réponse donnée

Elève	Procédure	Réponse
Henri  	Dessine le terrain, représente un joueur et chacun de ses adversaires, puis schématise les échanges entre joueurs par des flèches. Dénombre les 4 matchs joués par chacun (5participants) Pose une addition en ligne, puis fait un calcul. Conclut par une phrase.	Réponse fausse au problème Dénombrement incorrect : chaque match entre deux joueurs A et B est compté deux fois (A contre B et B contre A) Cependant le calcul est correct et cohérent avec la démarche.

Mehdi 	Interprète la situation comme une situation multiplicative Pose une multiplication qui représente le nombre de joueurs (5) par le nombre de matchs joués (5). Conclut par une phrase	Réponse fausse au problème Raisonnement non explicité, l'élève a compté que chaque joueur fait 5 matchs, donc joue aussi contre lui-même. Calcul correct, cohérent avec le raisonnement (la multiplication posée n'apporte pas plus que si elle était en ligne).
Cyril 	Représente chacun des matchs en attribuant un symbole différent à chaque joueur (figures géométriques connues). Dénombrement organisé : il commence par les matchs du premier joueur, puis ceux du 2ème pas encore comptés, puis ceux du 3ème, puis celui du dernier. Dénombre les matchs dessinés, conclut par une phrase.	Réponse fausse au problème. Cependant la démarche est correcte : aucun oubli, aucun doublon dans la représentation du problème. Erreur dans le dénombrement final.
Alice 	Numérote chaque joueur, puis liste tous les matchs en annonçant le numéro des participants. Enumère les matchs joués par le premier joueur, puis ceux du 2ème joueur pas encore comptabilisés… jusqu'au 4ème joueur (comme Cyril) Dénombre les matchs Conclut par une phrase.	Réponse juste au problème Liste exhaustive, aucun oubli, aucun doublon.
Charlotte 	Représentation imagée des 5 enfants. Dessine les terrains et les premiers matchs en plaçant chaque joueur numéroté dans un terrain. Complète le troisième terrain en reprenant le premier joueur et conclut sur trois matchs en dénombrant les matchs dessinés (tous les joueurs ont été placés une fois) Le prolongement du quadrillage laisse une ambigüité : soit le premier joueur est repris juste pour mettre un adversaire au joueur 5, soit la recherche	Réponse fausse au problème. Mauvaise compréhension de la situation : il semble qu'elle n'ait pas de recul sur la situation et qu'elle ait placé les joueurs successivement sur le terrain. La réponse « 3 » laisse penser que sa démarche s'arrête quand tous ont été placés une fois.

	a été interrompue. *On peut alors supposer une suite éventuelle (qui n'aurait pas abouti car après 2-3, puis 4-5 elle serait revenue à u match 1-2)* Conclut par une phrase.	

3. Quelles sont les compétences relatives à la résolution de problèmes visées au travers de cette activité ?

Ce problème appartient à la classification des problèmes « pour chercher », les élèves de cycle 3 n'ayant pas de procédures expertes de résolution à disposition. Sur le plan mathématique, ce problème relève de la logique « combinatoire » et du dénombrement : *utiliser ses connaissances en logique et arithmétique…*

Les compétences[1] se résument à l'école, à *savoir organiser des informations numériques ou géométriques, savoir organiser sa recherche dans une situation de dénombrement (il s'agit ici de prendre en compte tous les matchs, sans oubli, et sans en compter un deux fois).*

Sur le plan méthodologique de la résolution de problème, on peut aussi évoquer des compétences dans le domaine de la démarche et de sa communication :

Formuler une hypothèse, la tester, argumenter, décrire, questionner, justifier un point de vue

Rédiger un texte pour communiquer sa démarche et le résultat d'une recherche individuelle[2].

4. L'enseignant souhaite faire évoluer la démarche de résolution proposée par les élèves. Sur quelle variable didactique peut-il intervenir ? Quelle mise en œuvre pédagogique peut-il proposer ?

Dans un second temps, l'enseignant peut proposer un problème de même type en jouant sur la seule variable didactique, qui est ici le nombre de participants. Un changement de variable didactique est fait pour faire évoluer les procédures de dénombrement, en se détachant des représentations figuratives et de certaines procédures qui vont devenir vite laborieuses. L'enseignant va amener l'élève à s'appuyer sur l'utilisation du nombre pour répondre plus rapidement et plus efficacement.

· Proposer un nombre plus grand, par exemple passer à 9 joueurs, pour faire évoluer chaque élève par rapport à sa propre représentation.

Cependant ce prolongement ne prend son sens que si parallèlement l'enseignant met en œuvre une réelle situation d'apprentissage autour de la démarche de résolution. Après une première recherche écrite individuelle, ou en binôme (ce qui permet de réduire le nombre de productions), l'enseignant organise une mise en commun avec confrontation des procédures utilisées et validation par la classe. Il espère ainsi que la mise en commun et les échanges entre élèves vont amener certains à utiliser des procédures auxquels ils n'avaient pas pensé.

Les connaissances et capacités, présentes dans les précédents programmes, sont alors travaillées :

---

[1] Programmes 2008

[2] Dans les capacités et attitudes du Socle commun. Décret du 11 Juillet 2006

· *Participer à un débat et échanger des arguments à propos de la validité d'une solution.*

· *Traiter les informations (incluant les représentations des autres élèves)*

· *Formuler oralement, avec l'aide du maître, un raisonnement rigoureux*

· *Elaborer, avec l'aide de l'enseignant, des écrits destinés à servir de référence dans les différentes activités.*

Ici, l'élaboration d'une affiche pour la classe pourrait servir à garder en mémoire la ou les démarches de résolution de ce problème, pour être réutilisées ultérieurement.

5. Rédigez un énoncé de problème de même type, que l'enseignant pourrait proposer en phase de réinvestissement à ses élèves. Préciser une mise en œuvre possible.

En réinvestissement, l'enseignant va changer le contexte du problème. Il peut par ailleurs proposer un travail de groupe soit différencié afin de pouvoir donner des sujets adaptés au niveau de chacun, soit en mixant dans les groupes, des élèves de niveau divers pour faire évoluer les procédures des élèves encore en difficulté.

· Première proposition : « En entrant dans la classe, les vingt élèves se serrent la main pour se dire 'Bonjour'. Combien de poignées de mains sont échangées ? »

Des démarches du type Somme $20+19+18....+1$ *ou Produit* 20×19 *puis division par 2 (plus difficile en cycle 3), devraient apparaitre. Il faut là aussi penser que chaque poignée de mains ne doit pas être comptée deux fois. On peut, si nécessaire, réduire le nombre à dix ou douze pour faciliter l'entrée dans la résolution.*

· Autre proposition : « Un jeu comporte six cartes numérotées de 1à 6. Combien de nombres différents à deux chiffres peut-on former en tirant deux cartes en même temps ? »

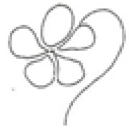
Des représentations des tirages sont attendues, avec ou sans représentation de la carte. La recherche peut être aléatoire ou organisée. Dans ce cas, la représentation avec un arbre de choix peut apparaitre. Cette recherche met l'accent sur l'aspect positionnel de notre numération (25/52), qui cette fois implique d'organiser le dénombrement des nombres obtenus par rapport au nombre de tirages.

En approfondissement, on peut proposer la même recherche avec 9 cartes, voire dix cartes (le chiffre 0 ne pouvant pas commencer un nombre à deux chiffres)

· Autre type de problème de dénombrement : « Combien de menus différents un restaurateur peut-il composer avec une entrée, un plat, un dessert à choisir parmi plusieurs propositions, le nombre de propositions rendant plus complexes le dénombrement. Le même type de problème peut se poser avec des polygones à créer (formes, couleurs, tailles), des tenues à assortir (pull, pantalon, chaussures/ de style ou de couleurs diverses).

II. Résolution de problème en Cycle 2. ANNEXES B, C, D, E

Agnès a 38 gommettes dans une boite.
Avec ces gommettes, elle fait des fleurs de 5 pétales.
Combien de fleurs de 5 pétales pourra-t-elle faire ?
Combien en restera t-il dans la boite ?



Ce problème est proposé en CE1.

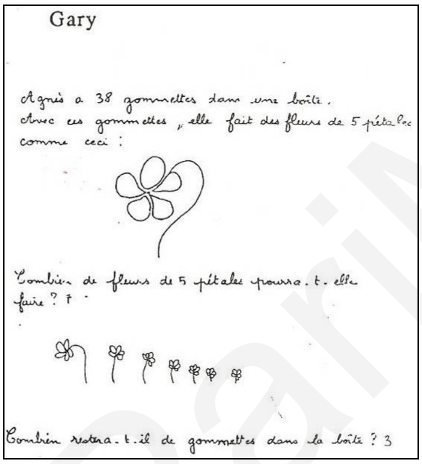
1. Résoudre ce problème avec la méthode de votre choix. Justifiez votre réponse.

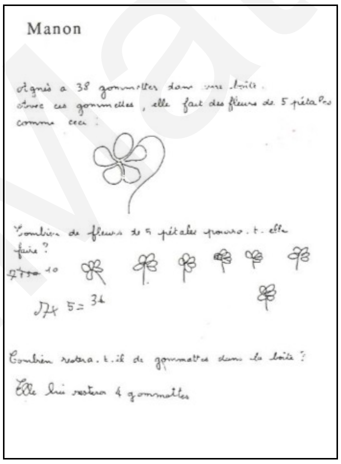
Chaque fleur ayant 5 pétales, Agnès peut faire 7 fleurs et il lui restera 3 gommettes. En effet la division euclidienne de 38 par 5 donne 7 comme quotient et 3 comme reste : $38 = 5 \times 7 + 3$

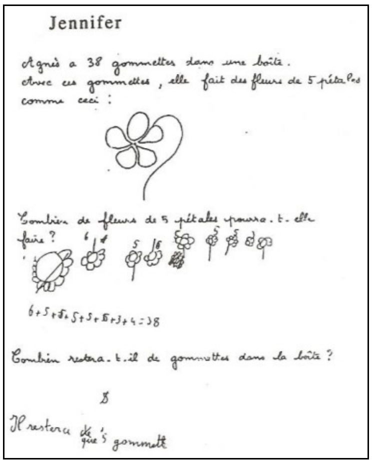
2. L'enseignant a recueilli à l'issue de cette première phrase les travaux d'Elodie, Elsa, Gaëlle, Gary, Hugues, Jennifer, Manon, Rachel. (Annexes B et C). Regrouper les travaux qui paraissent relever d'une procédure de même nature. Préciser les critères de classement.

L'enseignant peut rapidement voir que deux grands types de procédures plus ou moins abouties, sont mis en œuvre : d'une part les procédures s'appuyant sur une représentation imagée des fleurs et/ou des gommettes, puis sur le dénombrement, d'autre part les procédures s'appuyant sur un calcul.

· Une représentation par le dessin des fleurs puis le dénombrement des pétales : *Gary, Manon, Jennifer*



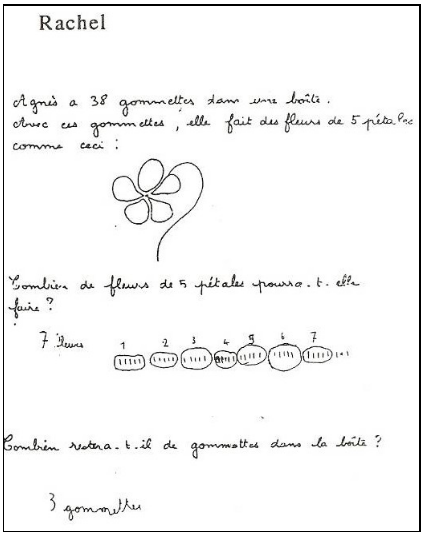


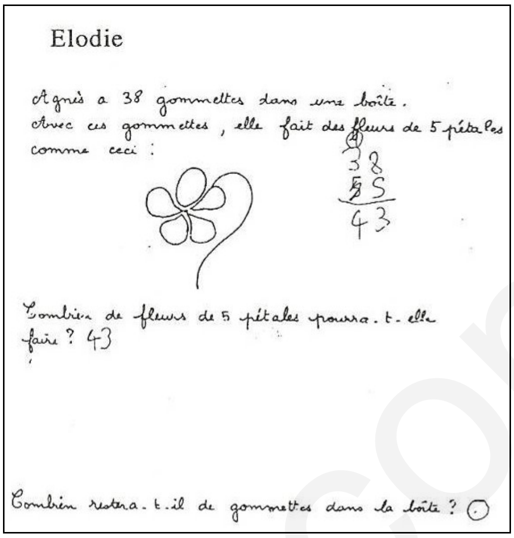


Avec cette procédure, les fleurs sont dessinées et comportent 5 pétales, malgré parfois quelques erreurs. *Gary* dénombre bien les fleurs et les gommettes restantes. *Manon* tente de dénombrer les gommettes utilisées et les gommettes restantes mais se trompe en faisant un calcul multiplicatif pour trouver le nombre de gommettes utilisées. *Jennifer* dessine des fleurs dont le nombre de pétales n'est pas toujours 5, mais dont le total fait bien 38. Elle fait une erreur sur les gommettes non utilisées.

· Une schématisation des gommettes par des bâtons, et un groupement par paquets de 5 : *Rachel*.

Le nombre de fleurs est correct ainsi que le nombre de gommettes restantes.



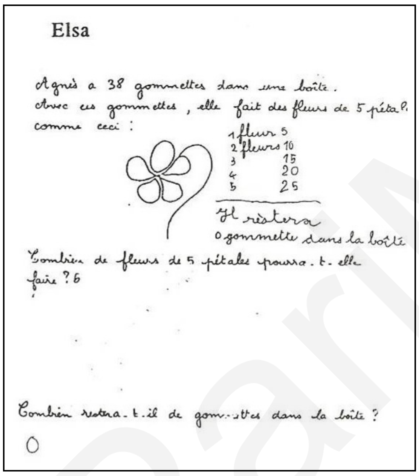


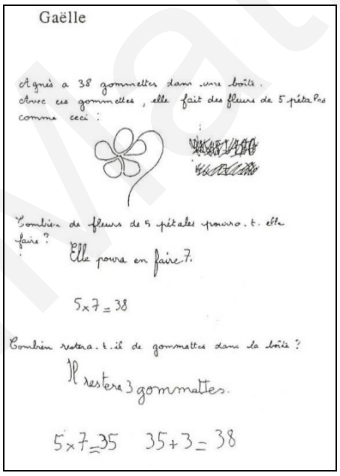
· Un calcul additif sur les données de l'énoncé : *Elodie*

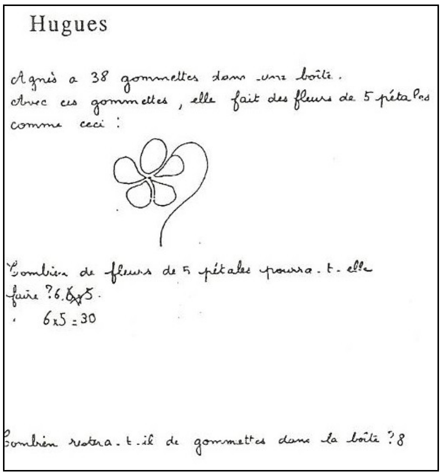
Elodie n'a pas compris le sens du problème et ajoute les deux données numériques, avec une erreur d'écriture sur le 5 dans son addition posée. Les deux réponses sont fausses.

· Un comptage de 5 en 5, ou additions successives de 5, ou multiples successifs de 5 : *Elsa*

Elsa interrompt son comptage et ne prend plus en compte les données. Ses deux réponses sont fausses.







· Recherche d'un multiple de 5 inférieur à 38, puis recherche du complément à 38 à partir de ce multiple pour trouver le nombre de pétales restants. : *Hugues, Gaëlle*

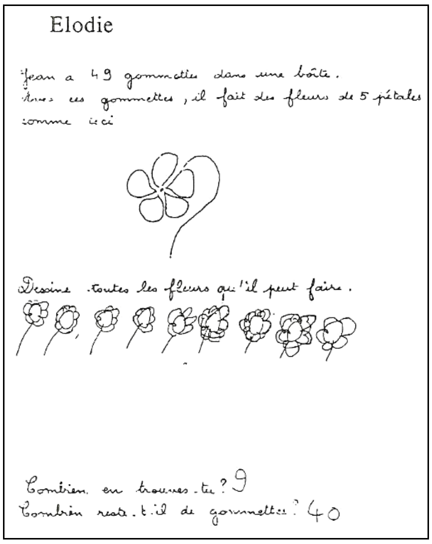
Gaëlle trouve les deux réponses exactes, malgré une erreur d'écriture dans le résultat de son produit.

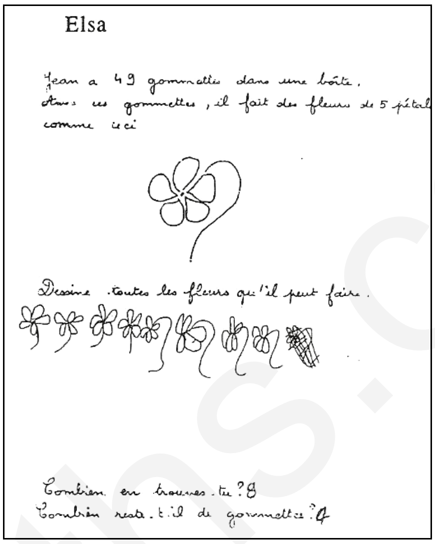
Hugues n'a pas trouvé le multiple maximum. Ses deux réponses sont donc inexactes, malgré une procédure correcte.

3. Dans un deuxième temps, l'enseignant propose de nouveaux énoncés à certains élèves dont il souhaite voir évoluer la procédure. Analyser l'évolution des procédures d'Elodie, Elsa, Jennifer et Rachel entre la première production (annexes B et C) et la seconde (annexes D et E), en explicitant les choix et les intentions de l'enseignant dans le changement des énoncés.

Dans un deuxième temps, l'enseignant propose de nouveaux énoncés à certains élèves dont il souhaite voir évoluer la procédure. En effet, *Elodie et Elsa* ont utilisé des procédures qui ne leur ont pas permis de conclure, en particulier sur le nombre de gommettes restantes.

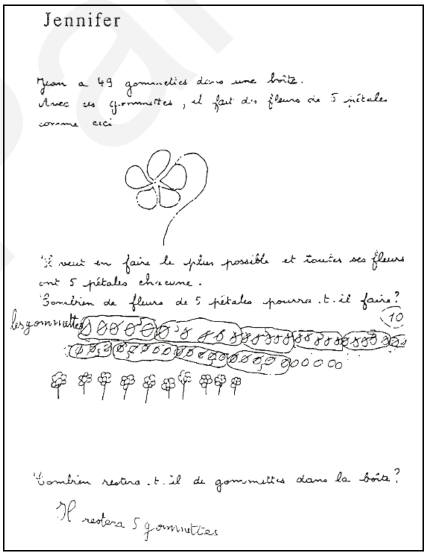
L'enseignant augmente alors le nombre de gommettes mais reste dans le même ordre de grandeur. Il veut surtout que ces élèves arrivent à prendre en considération les informations de l'énoncé. Il ajoute pour cela l'indication de dessiner toutes les fleurs.

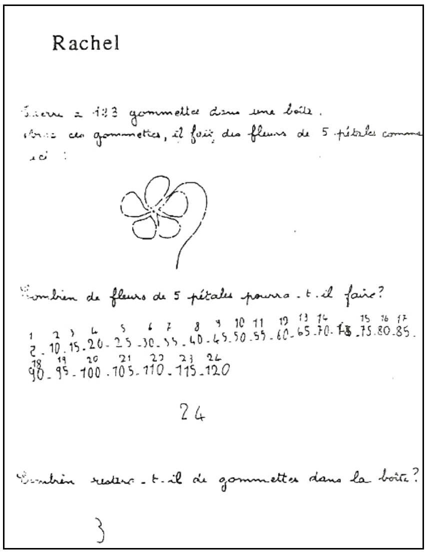




Elodie, qui avait ajouté les données de l'énoncé sans leur donner du sens, dessine correctement les fleurs, et les dénombre sans erreur. Par contre elle se trompe à nouveau en cherchant les gommettes restantes, en faisant à nouveau une soustraction qui n'a pas de sens puisqu'elle trouve 40 (49 gommettes - 9 fleurs).

Elsa remplace son comptage de 5 en 5 par le dessin complet des fleurs, mais fait une erreur dans le dénombrement des pétales puisqu'elle barre une fleur. Il est difficile de savoir si elle a compté les pétales de 5 en 5 comme la première fois, ou si elle les a calculés. Le nombre de gommettes restantes est exact, provenant sans doute de 49-45.



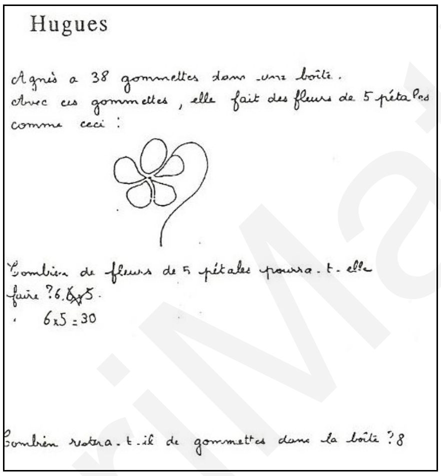


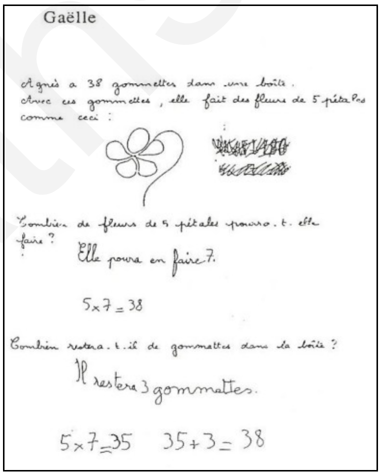
Pour *Jennifer*, l'enseignant augmente un peu le nombre de gommettes mais surtout explicite avec précision les deux contraintes qu'elle n'avait pas prises en compte. Cette fois, Jennifer dessine les gommettes, fait des paquets de 5, puis dessine les fleurs. La procédure est longue, et la représentation rend confus le dénombrement. Jennifer se trompe dans le nombre de fleurs et dans le nombre de gommettes restantes. Le passage au calcul n'est pas atteint.

Pour *Rachel*, le maître choisit un nombre plus élevé de gommettes, 123, pour l'inciter à abandonner la représentation de bâtonnets. Cette fois Rachel compte de 5 en 5, en énumérant tous les multiples de 5 jusqu'au plus grand acceptable, 120, et fait en parallèle le comptage de ces multiples qui lui permet de trouver le nombre de fleurs réalisées (24). Le nombre de gommettes restantes est exact. On peut noter que Rachel est toujours dans le dénombrement, et n'a pas utilisé une procédure de calcul.

4. Rédigez un nouvel énoncé que l'enseignant peut proposer à Hugues et Gaëlle en prolongement de ce problème. Citez deux aides matérielles que l'enseignant peut apporter à ces élèves ? Justifiez ces choix.

Hugues et Gaëlle avaient dans un premier temps utilisé une procédure multiplicative, avec succès pour Hugues, avec une erreur de table pour Gaëlle.





En réinvestissement, l'enseignant peut leur proposer un exercice du même type en augmentant le nombre de gommettes, voire en changeant le contexte. L'enseignant peut mettre à disposition de ces deux élèves une table de multiplications s'il veut laisser les élèves chercher comment utiliser judicieusement ces tables avec des nombres plus grands, ou une calculette. Dans ce cas, c'est l'exploration et l'utilisation de l'outil qui est visé. Voici quelques autres exemples d'énoncés :

- Paul a 97 gommettes. Il veut faire des fleurs de 5 pétales. Combien de fleurs pourra-t-il faire ?
  Avec la table, les élèves peuvent trouver que $5\times10=50$. *Ils peuvent ensuite approcher 97 par étapes successives* $97-50=47 \quad 5\times9=45$. *Les élèves pourront s'appuyer sur leur trace écrite pour dénombrer les fleurs* $10+9=19$ *et trouver les gommettes restantes 2.*
  Avec la calculatrice, les élèves cherchent par essais successifs à approcher 97 dans une multiplication par 5 : $5\times8 \ldots 5\times11 \ldots 5\times12 \ldots 5\times15 \ldots$ *de manière aléatoire ou organisée jusqu'à* $5\times19=95$. *L'écart entre 95 et 97 donnent 2 gommettes restantes.*

Dans les deux cas, les élèves peuvent aussi trouver que $5\times 20=100$ *et chercher la bonne interprétation de ce résultat par rapport au nombre de fleurs et au nombre de gommettes restantes. Une erreur sur ce dernier nombre est possible (3, écart entre 97 et 100, au lieu de 2).*

Voici d'autres énoncés possibles :

- Marie doit ranger 97 œufs dans des boites. Chaque boite contient 6 œufs. Combien de boites va-t-elle pouvoir remplir entièrement ? Combien lui reste-t-il d'œufs ?

  Un contexte familier, permettant de passer aux groupements par 6, un nombre 97 choisi pour sa décomposition $97=6\times 10+6\times 5+6\times 1+1$. *Réponse : 16 boites, reste 1 œuf.*

- Léo a 157 images de Pokémon à coller dans son grand livre d'images. Il peut coller 8 images sur chaque page. Combien de pages pleines va-t-il remplir ? Combien lui reste-t-il d'images ?

  Un contexte familier, une nouvelle table plus difficile (celle des 8), deux décompositions possibles à savoir interpréter : $157=8\times 10+8\times 5+8+8+8+8+5$ *ou* $157=8\times 20-3=8\times 19+5$. *Réponse : 19 pages, reste 5 images.*

  La question « combien de pages sont nécessaires pour coller toutes les images ? » est aussi envisageable, mais elle met moins en évidence le quotient et le reste.

En conclusion

☞ Dans une analyse de travaux d'élèves, la démarche et la réponse sont deux aspects à prendre en compte selon la question posée : décrire la procédure utilisée par l'élève, puis l'analyser en faisant ressortir si le problème a été compris, si la démarche est correcte, enfin chercher la cause possible des erreurs.
Par ailleurs il faut dire si la réponse est juste ou fausse pour le problème, cohérente ou non par rapport à la démarche. Regarder enfin si une conclusion est rédigée.

Dans les programmes 2008, les compétences des élèves sur la résolution de problèmes sont moins explicitées que dans les précédents. On peut noter cependant d'une manière générale que ces compétences se déclinent selon deux axes sur lesquels porteront votre analyse : les compétences relatives au contenu mathématique du problème, *spécifiques au sujet selon le thème abordé*, et des compétences dans le domaine de la démarche et de sa communication : *formuler une hypothèse, la tester, argumenter, décrire, questionner, justifier un point de vue, rédiger un texte pour communiquer sa démarche et le résultat d'une recherche individuelle*[3].

☞ La rédaction de ces analyses peut être longue. Il vous faut donc aussi penser à équilibrer la précision de votre réponse et la 'rentabilité' dans le rapport temps passé/barème.

[3] Dans les capacités et attitudes du Socle commun. Décret du 11 Juillet 2006