

## D8C. Autour des problèmes du Champ Additif

Ce fichier, corrigé du fichier D8, présente l'analyse didactique des énoncés de problèmes du Champ additif proposés. Nous rappelons qu'on appelle **Champ additif**, l'ensemble des situations qui peuvent être traitées à l'aide d'une addition, d'une soustraction, ou d'une combinaison de ces deux opérations. L'étude du champ additif trouve sa place au cours du cycle 2. Il s'agit de construire simultanément le sens des opérations et leurs techniques. **Les techniques opératoires** de l'addition puis de la soustraction posée se mettent en place, parallèlement au répertoire des **résultats mémorisés des tables d'addition**. La technique de la soustraction posée est accessible en fin de cycle 2.

Il faut noter que les problèmes qu'on peut résoudre avec une addition ne sont pas toujours plus faciles que ceux qui requièrent une soustraction.

*Les réponses apportées ici ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.*

Ce document présente en conclusion, la mise en parallèle des compétences visées dans le champ additif, ainsi que des exemples pour chaque type de problème relevant d'une addition ou d'une soustraction.

### Analyse didactique d'énoncés de problèmes

Indiquer à quel type appartient chaque problème, selon la classification ci-dessus. Faire une analyse didactique de ces énoncés : schéma de la situation, procédure attendue, choix des variables, niveau éventuel.

I. Une enseignante propose une séance sur la résolution de problèmes additifs. Elle propose à ses élèves de CE1 ces quatre énoncés. Les élèves connaissent la technique opératoire de l'addition et la réinvestissent dans des " petits problèmes additifs ". Ils n'ont jamais traité de situation soustractive. La maîtresse a introduit " l'addition à trous " comme un simple jeu de l'esprit sans faire référence à des situations précises.

#### *Problème n° 1*

Dans une école, il y a 68 filles et 52 garçons. Combien y a-t-il d'enfants dans cette école ?

#### *Problème n° 3*

Parmi les 57 voitures d'un parking, il y a 35 voitures rouges, les autres sont noires. Combien y a-t-il de voitures noires ?

Les problèmes 1 et 3 relèvent d'une combinaison d'états (Cb1 et Cb2).

Le problème 1 se résout par addition. Il s'agit de trouver le cardinal d'une collection (enfants dans l'école) composée de deux parties de cardinal connu (68 filles et 52 garçons). Le choix des nombres amènent à évaluer les élèves sur la technique de l'addition avec retenue qu'ils ont déjà travaillées. Des procédures de représentation sont peu probables compte tenu de la taille des nombres.



Le problème 3 relève de la soustraction puisqu'il s'agit de déterminer le cardinal d'une partie (le nombre de voitures noires) connaissant ceux de l'autre partie (35 voitures rouges) et la globalité (57 voitures). C'est l'objectif visé par l'enseignante. Vu la nouveauté de la situation, certains élèves peuvent aller vers des représentations imagées ou schématisées malgré la taille des nombres. L'addition à trou ayant déjà été travaillée, certains élèves peuvent l'utiliser. D'autres expérimenteront peut être de nouvelles procédures approchant les techniques de la soustraction posée en lien avec la numération (unités, dizaines).

#### Problème n° 2

Dans un train, il y a 135 personnes. Le train s'arrête, il en descend 35 et il en monte 12. Combien y a-t-il de personnes dans le train ?

#### Problème n° 4

Alain a acheté 24 boules pour décorer le sapin. En entrant dans la salle, il remarque que le sapin est déjà décoré. " Ca ne fait rien " lui dit Sophie, " accrochons-les quand même ". Il y a maintenant 41 boules. Combien y en avait-il au départ ?

Les problèmes 2 et 4 relèvent d'une transformation d'états (Tr3. Tr1 et Tr2).

Le problème 4 est une recherche de l'état initial, connaissant l'état final (41 boules) et la transformation (24 boules ajoutées). La procédure visée est l'addition à trou, une des techniques accessibles pour traiter la soustraction. Compte tenu de la taille des nombres et de la nouveauté de la situation, certains élèves iront peut-être sur des représentations imagées ou schématisées.

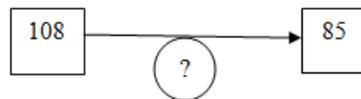


Le problème 2 présente une difficulté supplémentaire dans la représentation de la situation car il comporte deux transformations, l'une relevant d'une addition (35 descendent), l'autre d'une soustraction (12 montent). L'état initial est connu (135 voyageurs), l'état final est cherché. Compte tenu de la taille des nombres (135), la représentation imagée ou schématisée est difficilement réalisable. Nous pouvons imaginer ce problème plus comme un problème pour chercher, où l'initiative des élèves reste ouverte.

**II.** Ce problème a été proposé dans les classes de CE2 en Septembre 2000, dans le cadre de l'Évaluation Nationale CE2.

108 coureurs prennent le départ d'une course. Il y a beaucoup d'abandons. 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ?

Il y a ici transformation d'états avec recherche de la transformation (Tr2). La transformation est négative, puisqu'il s'agit d'abandon. Il s'agit de déterminer la valeur de cette diminution.



La résolution experte met en œuvre une soustraction, pouvant présenter certaines difficultés compte tenu de la retenue  $108 - 85 = ?$ . La taille des nombres a été choisie pour faire obstacle à la représentation imagée ou schématisée des coureurs et favoriser le recours au nombre. La compréhension de la situation est facile. Ce problème relève plutôt du début du cycle 3.

**III.** Voici un énoncé de problème proposé à des élèves en début d'année de CE2.

Pendant la récréation, la maîtresse de CP a tiré 62 photocopies, et celle de CM1 48 photocopies. Le compteur de la photocopieuse augmente de 1 à chaque tirage. Il indique maintenant 1043. Qu'indiquait-il avant la récréation ?

Il y a ici un problème de combinaison d'états puis de transformation avec recherche de l'état initial (Cb1 et Tr3). En effet pour trouver l'état initial du compteur, il va d'abord falloir déterminer la valeur de la transformation, c'est-à-dire le nombre total de tirages réalisés.

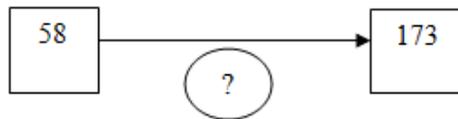


La recherche du nombre de photocopies se fait par une addition, avec deux retenues  $62 + 48 = 110$ . L'élève doit aussi comprendre que le compteur augmente au fur et à mesure des tirages. La recherche de la valeur initiale du compteur relève d'une addition à trous  $? + 110 = 1043$  ou d'une soustraction  $1043 - 110 = ?$ . Compte tenu du nombre d'informations, de la taille des nombres et de la recherche de l'état initial, le problème relève plus du cycle 3.

**IV.** Des enseignants de CE1 et CE2 ont proposé à leurs élèves le problème suivant :

Jean a une collection de timbres. Hier il en avait 58. Ce matin, son grand-père lui a donné des timbres qu'il a ajoutés à sa collection. Il en a maintenant 173. Combien son grand-père lui en a-t-il donnés ? »

Il y a ici transformation d'états avec recherche de la transformation (Tr2).



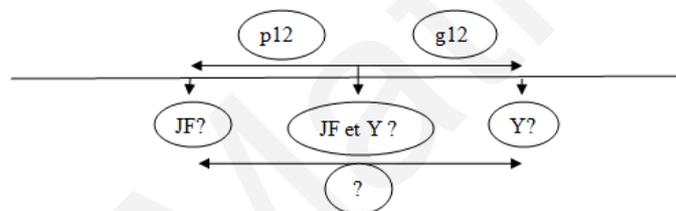
Une difficulté de cette situation ressort de l'énoncé qui parle d'ajout... alors que la procédure experte est ici une soustraction avec retenue  $173 - 58 = ?$  ou une addition à trous  $58 + ? = 173$ . La taille des nombres a été choisie pour rendre difficile la représentation imagée ou schématisée des collections et favoriser le recours au nombre. Ainsi ce problème relève plutôt d'un début de cycle 3.

V. Voici un énoncé de problème proposé en cycle 3.

Deux enfants Yann et Jean François ont le même nombre de billes. Ils jouent ensemble et Yann gagne 12 billes. Combien a-t-il maintenant de plus que Jean François ?

C'est ici un problème de comparaison d'états avec recherche de l'écart (Cp2).

Le problème est difficile du fait qu'il comporte deux transformations, d'une part du nombre de billes de Yann, avant et après la partie, d'autre part du nombre de billes de Jean-François avant et après, et que les états initiaux et finaux, ne sont pas connus.



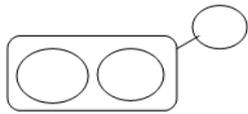
Des schémas de représentation peuvent aider à voir les transformations et les états finaux, mais ils sont difficiles pour la plupart des élèves. Bien qu'on soit ici dans un contexte cardinal, on peut transférer le contexte à un jeu de déplacement sur bande graduée où l'un gagnerait 12 (g12) et l'autre perdrait 12 (p12), ce que les élèves doivent interpréter car cela n'est pas explicite dans l'énoncé. L'écart de 24 est alors plus visible.

Les élèves pourront aussi le résoudre avec des procédures personnelles, par exemple en choisissant arbitrairement un nombre de billes de départ. Chacun admet alors implicitement que la réponse est toujours la même, quelque soit le nombre choisi. Ce problème relève du cycle 3, comme problème pour chercher.

### En conclusion

Les compétences exigibles dans les programmes 2008 s'alignent sur la classification des problèmes additifs proposée par Gérard Vergnaud. Les exemples donnés s'inscrivent dans les deux aspects du nombre, l'aspect cardinal portant sur les quantités, et l'aspect ordinal portant sur la position sur une bande numérique graduée.

### Situation additive de type combinaison (Cb) d'états



Cb1. Recherche de la valeur obtenue par réunion des deux états.

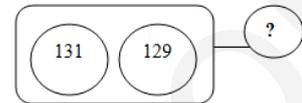
Cb2. Recherche du complément après partition d'un état en deux autres, dont l'un est connu.

Cb1. Déterminer, par addition, la quantité ou la valeur, obtenue par réunion de deux quantités ou de deux valeurs connues.

Cb2. Dans des situations où deux quantités ou valeurs, sont réunies, déterminer l'une des quantités ou l'une des valeurs.

Cb1. Dans une école on compte 131 filles et 129 garçons. Combien y a-t-il d'élèves dans l'école ?

*Une réunion, une addition :  $131 + 129 = 260$*



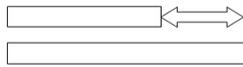
Cb2. Dans un jeu de 52 cartes, il y a 40 cartes associées à des nombres. Combien y a-t-il de « cartes -figures » ?

*Un complément, une soustraction :  $52 - 40 = 12$*



### Situation additive de type comparaisons (Cp) d'états

Dans des situations où deux quantités ou deux valeurs sont comparées :



Cp1. Recherche de l'un des états.

Cp2. Recherche de l'écart entre les deux états

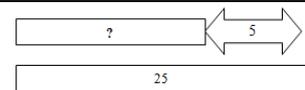
Cp1. Déterminer l'une des quantités ou l'une des valeurs.

Cp2. Déterminer le résultat de la comparaison.

Cp1. Zoé possède 25 images de Pokémon. Elle en a 5 de plus que Luce.

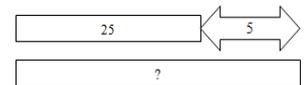
Combien Luce en a-t-elle ?

*Un état inconnu, une soustraction :  $25 - 5 = 20$*



Cp1. Jules a 25ans. Son frère Tom a 5 ans de plus. Quel âge a Tom ?

*Un état non connu, une addition :  $25 + 5 = 30$*



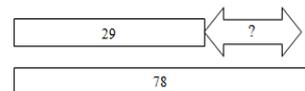
Cp2. Zoé a 29 images de Pokémon. Léa en a 78.

Combien Léa en a-t-elle en plus ?

Cp2. Julien a 29 ans. Son grand père à 78ans.

Quelle est leur différence d'âges ?

*Un écart, une soustraction :  $78 - 29 = 49$*



### Situation additive de type transformations d'états

Dans le cadre cardinal



Tr1. Déterminer, par addition ou soustraction, la quantité (ou la valeur) obtenue à la suite d'une

- Tr1. Recherche de l'état final après transformation.
- Tr2. Recherche de la transformation.
- Tr3. Recherche de l'état initial.

*augmentation ou d'une diminution.*

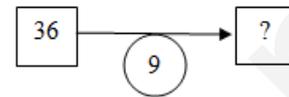
*Tr2. Trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution.*

*Tr3. Dans des situations où une quantité ou une valeur subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité ou la valeur initiale.*

Tr1. Arthur a 36 billes, il en perd 9. Combien lui en reste-t-il ?

*Une perte, une soustraction :  $36 - 9 = 27$*

*S'il avait gagné, une addition :  $36 + 9 = 45$*



Tr2. En début de partie, Arthur a 49 billes. En fin de partie, il lui en reste 37. En a-t-il gagné ou perdu ? Combien ?

*Une perte, une soustraction :  $49 - 37 = 12$*

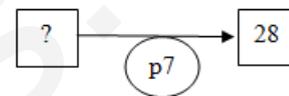


Tr3. Arthur vient de perdre 7 billes. Il en a maintenant 28.

Combien en avait-il au départ ?

*Une perte, une addition :  $28 + 7 = 35$*

*S'il avait gagné, une soustraction :  $28 - 7 = 21$*



### Dans le cadre ordinal



- Tr1. Recherche de l'état final après transformation.
- Tr2. Recherche de la transformation.
- Tr3. Recherche de l'état initial.

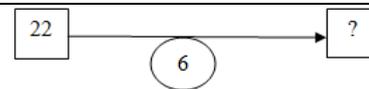
*Tr1. Déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée après un déplacement en avant ou en arrière.*

*Tr2. Déterminer la valeur du déplacement.*

*Tr3. Déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant un déplacement en avant ou en arrière*

Tr1. Au jeu de l'oie, Léa est sur la case 22. Elle fait 6 au lancer de dé. A quelle case doit-elle placer son pion ?

*Un déplacement en avant, une addition :  $22 + 6 = 28$*



Tr2. Au jeu de l'oie, Léa est sur la case 12. Après son lancer de dé elle arrive sur la case 17. Quelle valeur affiche le dé ?

*Un déplacement en avant, une soustraction :  $17 - 12 = 5$*

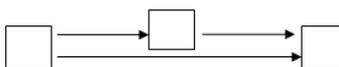


Tr3. Au jeu de l'oie, Léa arrive sur la case 21, après avoir obtenu 5 à son lancer de dé. Sur quelle case était-elle avant déplacement ?

*Un déplacement en avant, une soustraction :  $21 - 5 = 16$*



Certains problèmes relèvent de la **composition de ces différentes transformations d'états**, avec recherche de l'un des états après plusieurs transformations ou recherche de l'une ou l'autre de ces transformations.



Jean pense à un nombre. Il ajoute 75, puis 85 et trouve 420.

Quel est le nombre de départ ?

· Première méthode :

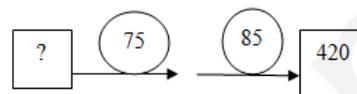
*Recherche de l'état intermédiaire puis de l'état initial :*

$$420 - 85 = 335 \quad 335 - 75 = 260$$

· Seconde méthode

*Recherche de la transformée composée puis de l'état initial :*

$$75 + 85 = 160 \quad 420 - 160 = 260$$



Enfin certains problèmes peuvent relever d'**une ou plusieurs transformations d'états et d'une combinaison d'états**.

Emma avait 18 jetons bleus et 12 jetons rouges.

Il lui reste en fin de parties 7 jetons bleus et 15 jetons rouges.

A-t-elle gagné ou perdu ?

· Première méthode

*Recherche de l'état initial, une addition :*  $18 + 12 = 30$

*Recherche de l'état final, une addition :*  $7 + 15 = 22$

*Emma a perdu. Recherche de l'écart, une soustraction :*

$$30 - 22 = 8$$

· Seconde méthode sans chercher les états

*Recherche de chaque transformation, soustraction :*

$$18 - 7 = 11 \text{ Perdu } 11 \quad \text{et} \quad 15 - 12 = 3 \text{ Gagné } 3$$

*Recherche de la composée des deux transformations :*  $11 - 3 = 8$

Nous avons ici une combinaison d'états ainsi que deux transformations.

Le problème posé peut aussi se résoudre comme une composition de transformations.

