

## D14. Autour des problèmes du Champ Multiplicatif

Ce document vous présente en première partie, une **typologie de problèmes** du champ multiplicatif, selon l'étude menée par Gérard Vergnaud<sup>1</sup>, psychologue et didacticien, qui replace les problèmes multiplicatifs à l'intérieur du champ conceptuel<sup>2</sup> des structures multiplicatives. Les situations associées impliquent une résolution par multiplication ou division. Les notions de multiples et diviseurs prennent sens, ainsi que quotient et reste de la division euclidienne. L'apprentissage recouvre ce vaste domaine de la **proportionnalité**, dans son aspect fonctionnel ainsi que dans les différents contextes d'application : échelle, agrandissement, pourcentage, vitesse.... Les notions de fraction et de nombre rationnel se construisent.

La seconde partie est consacrée à des productions relatives à des situations de proportionnalité.

☞ Les procédures relatives à la proportionnalité seront présentées dans le fichier **D14C**, ainsi que les réponses aux questions posées.

*Celles-ci servent à cadrer votre réflexion. Les réponses apportées ne sont pas exhaustives. Elles dépassent cependant parfois celles attendues dans le cadre du concours, pouvant ainsi enrichir votre vue sur d'autres travaux proposés ou sur l'apprentissage en général.*

### I. La classification de G. Vergnaud regroupe les problèmes multiplicatifs en plusieurs catégories.

G.VERGNAUD définit la **proportion simple** comme intervenant entre deux domaines de grandeurs et deux espaces de mesures différents, dans une variété de contexte (cardinal, ordinal ou de mesure). Nous rappelons ici que, quelque soit le problème, c'est l'**identification des deux grandeurs** en jeu qui donnera son sens au calcul effectué. Aussi, nous partirons de la situation la plus générale où les deux grandeurs sont représentées, la grandeur X pouvant prendre les valeurs a et b, la grandeur Y les valeurs c et d.

Dans chaque schéma représentatif, les deux grandeurs seront spécifiées, et selon le cas, chacune de ces valeurs peut être recherchée. Précisons ici que ces schémas, qui pourraient s'apparenter à des tableaux de proportionnalité, ne sont pas présentés ici en tant qu'outil de résolution (procédure) mais en tant qu'outil de représentation de la structure du problème.

Grandeur X	a	b
Grandeur Y	c	d

<sup>1</sup> <http://www.ardm.eu/contenu/gérard-vergnaud-0>

<sup>2</sup> Champ conceptuel : ensemble de situations dont le traitement implique des concepts, des théorèmes en étroite connexion ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisés pour les représenter

✦ Proportionnalité simple avec présence de l'unité.

Ces problèmes vont se résoudre avec une multiplication ou une division, permettant de trouver le produit ou le quotient des deux données.

○ Multiplication

Grandeur X	1	b
Grandeur Y	c	?

Un kangourou fait des *bonds réguliers* de 5m. Quelle distance a-t-il parcouru après 12 bonds ?

Julia partage un ruban en 15 morceaux *identiques* de 8cm de long *chacun*. Quelle était la longueur du ruban?

Arthur a rangé ses cartes de Pokémon dans un album de 18 pages. Chaque page contient 6 cartes. Combien a-t-il de cartes ?

Nombre de bonds	1	12
Distance en <i>m</i>	5	?

Nombre de morceaux	1	15
Longueur en <i>cm</i>	8	?

Nombre de pages	1	18
Nombre de cartes	6	?

○ Division partition : on cherche la valeur d'une part

Grandeur X	1	b
Grandeur Y	?	d

On découpe une bande de 375 *cm* de long en 25 rubans tous identiques. Quelle est la longueur de *chaque* ruban ?

On partage équitablement 245 euros entre 15 personnes. Quelle est la part maximum de *chacun* ?

Un groupe de 210 personnes se répartissent dans 6 cars pour partir en excursion. Combien y-a-t-il de personnes dans *chaque* car ?

Nombre de rubans	1	25
Longueur en <i>cm</i>	?	375

Nombre de personnes	1	15
Somme en euros	?	245

Nombre de cars	1	12
Nombre de personnes	?	100

○ Division quotient : on cherche le nombre de parts

Grandeur X	1	?
Grandeur Y	c	d

Dans une bandelette de tissu de 375 *cm* de long, on découpe des rubans de 35 *cm* *chacun*. Combien de rubans peut-on découper ?

On veut transporter 315 enfants dans des autocars pouvant transporter *chacun* 45 enfants. Combien faut-il d'autocars ?

Une puce se déplace par bonds réguliers de longueur 4, à partir de 0 sur une piste graduée. Elle arrive au point 96. Combien de bonds a-t-elle fait ?

Nombre de rubans	1	?
Longueur de tissu en <i>cm</i>	35	375

Nombre de cars	1	?
Nombres d'enfants	45	315

Nombre de bonds	1	?
Position	c	d

Parfois l'énoncé est plus discret dans sa classification...

On compte *de 8 en 8*, en reculant, à partir de 76 : 76 ; 68 ; 60....Quel est le dernier entier prononcé ? Et à partir de 267 ?

Le pas est connu (8). On ne demande pas directement le nombre de pas réalisés. Cependant, la recherche va mener à trouver combien de fois 8 dans 76, soit par décomptage de multiples de 8, soit par division, soit par recherche du

multiple de 8 le plus proche. C'est donc bien un problème de quotition sous jacent...L'augmentation du nombre de départ poussera vers une procédure plus performante que le décomptage.

#### ✦ Proportion simple sans présence de l'unité

Grandeur X	a	b
Grandeur Y	c	?

Chloé achète 6 livres qui coûtent chacun le même prix ; elle paie 45 euros. Combien va-t-elle payer pour 9 livres ?

Un marsupilami parcourt 34m en 5 bonds réguliers. Quelle distance parcourt-il en 7 bonds ?

Nombre de livres	6	9
Prix en euros	45	?

Nombre de bonds	5	7
Distance en $m$	34	?

Ces problèmes faisant intervenir trois données, ils ne peuvent être résolus directement par une multiplication ou une division. Le vaste champ de la proportionnalité ouvre à des procédures de résolution diverses, selon le contexte, la nature des données numériques, le niveau de représentation et/ou de connaissance de chacun.

#### ✦ Produit de mesures

Ces problèmes relèvent soit d'une multiplication, soit d'une division. Ils peuvent se représenter par un tableau à double entrée, un arbre de choix (type combinatoire), ou par l'aire d'un rectangle. Selon la formulation de l'énoncé, la division peut être euclidienne (reste nul) ou avec un reste.

Un rectangle de 18 cm de longueur a pour aire 216 cm<sup>2</sup>. Quelle est la largeur de ce rectangle ?

Paul a 220 carreaux. Il veut carreler un rectangle le plus long possible ayant 12 carreaux sur la largeur. Quelle sera cette longueur ?

Thibaut a un sachet de gommettes de huit formes différentes, chaque forme prenant six couleurs différentes. Combien de sortes différentes de gommettes ce sachet contient-il?

#### ✦ Problème de comparaison (type fois plus/moins)

Ces problèmes ont pour caractéristique de comporter des mots inducteurs pouvant être une aide (*fois*) ou un obstacle (*plus, moins*).

Paul a 36 ans. Son père est *deux fois plus* âgé que lui, son fils est *quatre fois moins* âgé que lui. Quel âge a son père ? Son fils ?

On voit aisément que la recherche du *combien de fois plus/moins* amène à des expressions parfois complexes et d'un intérêt discutable :

Arthur a 18 cartes. Son copain Théo en a 54 et sa copine Agathe en a 9. *Combien de fois* Théo en a-t-il de plus qu'Arthur ? Et Agathe ? Ou encore : *Combien* Théo en a-t-il de fois plus qu'Arthur ?

✦ **Proportion double** : Dans ce type de situation, il y a trois grandeurs en jeu et une grandeur varie proportionnellement à deux autres qui sont indépendantes.

Ici, le problème classique du prix à payer en fonction d'un nombre de personnes et d'un nombre de jours. On peut alors chercher le prix total ou le prix de la nuitée.

Un groupe de six adultes part au ski pendant 3 jours. Le forfait à la journée est de 25€. Combien ce groupe va-t-il dépenser ?

Trois couples partent en vacances en auberge. Chaque chambre pour deux personnes coûte 45€, petit déjeuner compris. Le groupe ne souhaitant pas dépenser plus de 600€ pour l'hébergement, combien de jours pourront-ils rester ?

✦ **Proportion simple composée.** Dans ce type de situation, il y a trois grandeurs en jeu et une grandeur varie proportionnellement à une autre qui varie proportionnellement à une troisième. Les problèmes faisant intervenir des conversions d'unités relèvent aussi de cette catégorie.

Léo achète 12 paquets de cartes Pokémon. Chaque paquet contient 8 cartes. Combien a-t-il de cartes ?

Combien peut-on remplir de verre de 15cl avec un bidon de 5 litres de vin ?

La première étape consiste à utiliser la proportionnalité pour convertir 5l en 500cl, ce qui relève d'une proportionnalité simple. La seconde étape est un problème de quotient qui se résout ici par une division avec reste  $500 = 15 \times 33 + 5$ .

## II. Représentation de problèmes multiplicatifs

Nous vous proposons ici quelques énoncés qui pourraient être proposés à des élèves de cycle 3. Caractérissez ces problèmes en référence à la classification précédemment présentée. Vous préciserez l'opération attendue sans l'effectuer.

P1. Lors des essais d'une course automobile, un pilote fait 15 tours sur un circuit de 7 km chaque tour. Quelle distance a-t-il parcouru ?

P2. A la piscine un groupe de 15 élèves se relaient pour effectuer une course, en nageant chacun la même distance. La course se joue sur 750m. Quelle distance chacun doit-il parcourir ?

P3. Johann a 5€. Il va acheter des bonbons à 25centimes pièce. Combien peut-il en acheter ?

P4. Un créateur fabrique des carnets reliés. Il dispose de 9 couleurs de spirales et de 12 papiers de couvertures. Combien de variétés différentes de carnets peut-il créer ?

P5. Trois copains ramassent des châtaignes. Le second en a ramassé trois fois plus que le premier, et le troisième deux fois moins que le second. Le premier, Léo, en a ramassé 42. Combien en ont-ils en tout ?

P6. Jeanne a acheté 4 gâteaux identiques pour 6€. Combien va-t-elle payer pour 10 gâteaux identiques ?

P7. A la kermesse, Maia a gagné 9 jetons au jeu d'équilibre, 14 jetons à une loterie et 6 jetons à la pêche à la ligne. Pour avoir un lot, il lui faut 12 jetons. Combien de lots va-t-elle pouvoir choisir ?

P8. Un fabricant de jouets expédie 35 cartons, chacun contenant respectivement 24boites de figurines. Combien de boites le client va-t-il recevoir ?

P9. Dans un cinéma il y a 12 places par rangées. Quand il est plein, il peut contenir 216 personnes assises. Combien y a-t-il de rangées ?

P10. Un arbre mesure 5,50m. Un autre arbre mesure le triple. Quelle est sa hauteur ?

## III. Analyse de Travaux d'élèves<sup>3</sup>

### Problème 1

---

<sup>3</sup> D'après Dijon 1996/ Caen 1996 / Grenoble 2001

L'énoncé suivant a été donné à des élèves de fin de cycle 3 :

"Avec un pot de 6kg, on peint une surface de  $15\text{m}^2$ . Avec un pot de 10kg, on peint une surface de  $25\text{m}^2$ . »

- Combien de  $\text{m}^2$  peut-on peindre avec 16kg de peinture ?
- Combien de kg de peinture faut-il pour peindre  $50\text{m}^2$  ?
- Combien de  $\text{m}^2$  peut-on peindre avec 4kg de peinture ?"

1. Quelle est la notion mathématique sous-jacente à l'énoncé ? Justifier.
2. Répondre aux trois questions, en utilisant trois procédures distinctes que vous justifierez en explicitant les propriétés mathématiques utilisées.
3. Pour la troisième question, analysez la procédure de cet élève.

*15 : 3 = 5 m<sup>2</sup> pour 5 m<sup>2</sup> il faut 6 : 3 = 2 kilos  
avec 4 kg on peut peindre 10 m<sup>2</sup>*

## Problème 2

Le problème ci-dessous, portant sur la proportionnalité, a été donné à des élèves de cycle des approfondissements.

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4m de papier. Pour emballer 25 livres, il faut 10m de ce papier.

1. Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14m de papier ?
2. Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?
3. Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6m de papier ?

1. Répondre à ces trois questions en rédigeant votre démarche.

Chacun des élèves a eu un énoncé et a travaillé seul sur sa feuille. Le maître leur a précisé au préalable que les livres étaient tous identiques et que chaque paquet ne contenait qu'un livre.

2. Étudier les productions des quatre élèves A, B, C, D en mettant en évidence les types de procédures utilisées, pertinentes ou non, en faisant référence aux propriétés de la proportionnalité en jeu, et en analysant les erreurs éventuelles.
3. Analyser la procédure de l'élève F. Proposez une aide pour faire comprendre ces erreurs à cet élève.

### Elève A

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

$$\begin{array}{r} 10 \text{ m} \\ + 4 \text{ m} \\ \hline 14 \text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \text{ livres} \\ + 25 \text{ livres} \\ \hline 35 \text{ livres} \end{array}$$

Il peut emballer 35 livres.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 10 \\ + 10 \\ + 10 \\ + 10 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \text{ m} \\ + 4 \text{ m} \\ \hline 20 \text{ m} \end{array}$$

Il faut 20 m de papier.

### Elève B

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 4 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ + 10 \\ \hline 35 \end{array}$$

↑ papier      ↑ livres

Il peut emballer 14 m de papier

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

10 livres      10 livres      10 livres

10 livres      10 livres

Il faut 20 m de papier.

$4 \times 5 = 20$

<p>3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?</p> $\begin{array}{r} 4\text{ m} + 4\text{ m} \\ - 2\text{ m} + 2\text{ m} \\ \hline 6\text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10\text{ m} \\ - 5 \\ \hline 5 \end{array}$ <p>Il peut emballer 15 livres.</p>	<p>3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?</p> $\begin{array}{r} 4 \\ + 2 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ + 2 \\ \hline 12 \end{array}$ <p>Il faut 12 m de papier.</p>
<p><b>Elève C</b></p> <p>1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?</p> $25 + 10 = 35$ <p>Le libraire a pu emballer 35 livres dans 14 m de papier.</p> <p>3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?</p> <p>Le libraire peut emballer avec 6 m de papier 15 livres.</p> $10 = 4\text{ m} \quad 5 = 2\text{ m}$ $10 + 5 = 15 \text{ livres}$ <p>2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?</p> $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 2 = 42\text{ m}$ <p>Il lui faut 42 m pour emballer 50 livres.</p>	<p><b>Elève D</b></p> <p>1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?</p> $\begin{array}{r} 4\text{ m} = 10 \text{ livres} \\ 10\text{ m} = 25 \text{ livres} \\ \hline + 10\text{ m} \\ = 14\text{ m} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \text{ livres} \\ + 25 \text{ livres} \\ \hline = 35 \end{array}$ <p>avec 14 m de papier il peut emballer 35 livres.</p> <p>2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?</p> <p><del>10 m</del> 10 m égale 25 livres, donc :</p> $\begin{array}{r} 10 \\ \times 2 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ + 25 \\ \hline 50 \end{array}$ <p>il faut donc 20 m de papier.</p> <p>3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?</p> $\begin{array}{r} 25 \text{ par } 10 \\ 50 \text{ par } 20 \\ \hline 2,50 \\ \times 6 \\ \hline 15,00 \end{array}$ <p>il peut emballer avec 6 m de papier 15 livres.</p>
<p><b>ELEVE F</b></p> <p>1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?</p> <p>pour 25 livres il lui faut 10 m pour 14 m de papier : <math>25 + 4 = 29</math> livres 10 pour aller à 14 on ajoute 4.</p> <p>2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?</p> $21 + 29 = 50$ $29 - 21 = 8$ <p>Il faut 8 m de papier pour 50 livres.</p> <p>3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?</p> $10 - 4 = 6$ $25 - 4 = 21$ <p>Avec 6 m de papier le libraire peut emballer 4 livres.</p>	

### Problème 3

Voici un exercice proposé à des élèves de CM2 et les réponses de 3 élèves, présentées dans le tableau ci-dessous. L'unité est le km.

Un automobiliste roule à une vitesse moyenne de 95km/h. Quelle distance va-t-il parcourir en 5 heures et demie ? En trois quarts d'heure ? En 3 heures 30 minutes ? En 50 minutes ?

1. Quels sont les deux principaux domaines mathématiques dont les connaissances sont nécessaires pour répondre à ces questions.
2. Résoudre ce problème.
3. Pour chacune des productions d'élèves : analyser la ou les procédures utilisées. Valider ou non les résultats, et donner une explication possible dans le cas d'une réponse erronée.

	Elève A	Elève B	Elève C
Pour 5 heures et demie, distance parcourue en <i>km</i> .	$95 + 95 + 95 + 95 + 95 + (95 : 2) = 522,5$	$95 \times 5,5 = 522,5$	$95 \times 5,5 = 522,5$
Pour trois quarts d'heure, distance parcourue en <i>km</i> .	$95 : 2 = 47,5$ $47,5 : 2 = 23,7$ Cela fait 71,2	$\frac{95 \times 4}{3} = 126,6$	$95 \times 0,45 = 42,7$
Pour 3 heures 30 minutes, distance parcourue en <i>km</i> .	$95 + 95 + 95 + (95 : 2) = 332,5$	$95 \times 3,5 = 332,5$	$95 \times 3,30 = 313,5$
Pour 50 minutes, distance parcourue en <i>km</i> .	$95 : 2 = 47,5$ $47,5 : 2 = 23,7$ $23,7 : 2 = 11,8$ cela fait $47,5 + 23,7 + 11,8 = 83$	$\frac{95 \times 6}{5} = 114$	$95 \times 0,50 = 47,5$

### En conclusion

#### Les étapes dans la résolution de problème

Nous allons nous placer ici dans la diversité des problèmes d'application, d'entraînement, de réinvestissement du champ multiplicatif. La résolution d'un tel problème nécessite de gérer différentes étapes. La lecture de l'énoncé nécessite en premier lieu une bonne compréhension des informations présentes. Celles-ci doivent permettre à l'élève une évocation de la situation, déjà rencontrée ou nouvelle, les procédures alors mises en œuvre n'étant pas les mêmes. La reconnaissance d'une situation va permettre de transposer la situation à des schémas de résolution structurés au préalable, permettant alors l'utilisation de procédures de résolution adaptées. Dans le champ multiplicatif, nous retiendrons :

*Le schéma de l'addition itérée (multiplication) ou de la soustraction répétée (division)*

*Le schéma de configuration rectangulaire, type quadrillage (multiplication/division)*

*Le schéma combinatoire (arbre de choix ou tableau à double entrée)*

*Le schéma de comparaison (fois plus, fois moins)*

Nouvelle étape avec la gestion du calcul et la maîtrise des techniques employées.

Enfin, la conclusion doit permettre à l'élève un retour au sens, s'assurant ainsi que son résultat est cohérent (en sens et en grandeur) par rapport à la question posée.