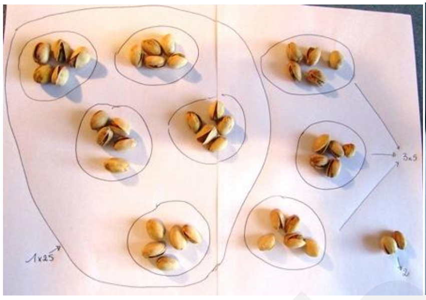
M1. Méthodes en NUMERATION

On se place ici dans l’ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;......\}$. Nous avons vu en S1 que notre numération décimale s’appuie sur un principe de groupements et d’échanges en base 10, c’est à dire qu’il faut 10 unités pour former une dizaine, 10 dizaines pour former une centaine, 10 centaines pour former un millier… Nous comptons en base dix. On appelle **base** d’un système de numération, le nombre d’unités de chaque ordre que l’on groupe pour former l’unité d’ordre immédiatement supérieur.

Base 10 : 42 pistaches



Base 5 : $\overline{132}^{5}$ pistaches

Base 3 : $\overline{1120}^{3}$ pistaches

L’écriture décimale chiffrée du nombre nous permet de déterminer rapidement le nombre de groupements dans un rang sans avoir à calculer.

↘ Il faudra veiller à ne pas confondre « *chiffre de…* » et « *nombre de…* ».

> Ainsi, on sait que le nombre 1045 se décompose en 1 millier, 0 centaines, 4 dizaines, 5 unités, mais on voit aussi qu’il y a 10 centaines et 45 unités, ou encore 104 dizaines et 5 unités.

Cependant pour « travailler » sur **la valeur d’un nombre entier**, il est difficile de rester sur cette écriture décimale, de la forme $\overline{mcdu}$ pour un nombre à quatre chiffres.

↘ On utilisera plutôt sa décomposition canonique qui permet de faire le lien entre cette écriture chiffrée et sa valeur : $\overline{mcdu}=m\times1000+c\times100+d\times10+u\times1=m\times10^{3}+c\times10^{2}+d\times10^{1}+u\times10^{0}$ avec $0<m\leq9$, $0\leq c\leq9$, $0\leq d\leq9$, $0\leq u\leq9$ ($m\neq0$ *car le nombre est de l'ordre du millier*).

↘ Méthode pour dénombrer dans une base donnée

Dans les autres bases de numération, le principe est le même. Nous avons vu en S2 que, dans une base *n*, il faut *n* unités d’un rang pour obtenir une unité du rang supérieur. On utilisera alors *n* « chiffres » pour écrire les nombres. La décomposition canonique d’un nombre $\overline{abcd}^{n}$ en base n est alors :

$$\overline{abcd}^{n}=a\times n^{3}+b\times n^{2}+c\times n^{1}+d\times n^{0}$$

Voici à travers un exemple, quatre procédures qui peuvent être utilisées :

Soit une collection de 538 objets à dénombrer en base 5

- **Le dénombrement par groupements-échanges**[1] : on va grouper les objets par paquets de 5 éléments (les « *cinquaines* », on obtient 107 paquets de 5 et il reste 3 unités. Ces paquets sont ensuite regroupés en sachet de 5 paquets (les *« vingt-cinquaines »)* : on obtient 21 sachets et il reste 2 paquets. On continue en groupant 5 sachets dans un sac (les « *cent vingt-cinquaines* » : on obtient 4 sacs et il reste 1 sachet. Le nombre 538 s'écrit donc $\overline{4123}^5$ en base 5.

- Il s'agit là de la même procédure en remplaçant la manipulation ou le dessin par le calcul. On effectue alors les divisions successives par la base, c'est-à-dire ici par 5 en organisant les quotients et restes obtenus pour écrire le nombre correctement :

N	b	Quotient	Reste	
538	5	107	3	$\dots 3\times 5^0$
107	5	21	2	$\dots 2\times 5^1+3\times 5^0$
21	5	4	1	$4\times 5^3+1\times 5^2+2\times 5^1+3\times 5^0$
				N = $\overline{4123}^5$

- **Le tableau de numération en base 5** : on va chercher quelle est la puissance de 5 la plus élevée « contenue » dans 538 : $5^4=625$; $5^3=125$. C'est donc 5^3 avec $538=4\times 5^3+38$.

  On décompose ensuite 38 selon les autres puissances de la base : $38=25+2\times 5+3=1\times 5^2+2\times 5+3$

« *Cent vingt-cinquaine* »	« *Vingt-cinquaine* »	« *Cinquaine* »	Unités
5^3	5^2	5^1	5^0
4	1	2	3

- Cette procédure de calcul s'appuie cette fois sur la **recherche de la puissance la plus élevée de la base** « contenue » dans le nombre 538. On effectue alors les divisions euclidiennes successives selon les puissances décroissantes de 5. Quotients et restes nous donnent le nombre écrit directement de gauche à droite. $5^4=625$; $5^3=125$; $5^2=25$; $5^1=5$

538	Puissances de la base	Quotient	Reste	
538	125	4	38	$4\times 5^3\dots\dots$
38	25	1	13	$4\times 5^3+1\times 5^2\dots.$
13	5	2	3	$4\times 5^3+1\times 5^2+2\times 5+3$

[1] Cette procédure est utilisée en cycle 2 pour faire comprendre aux enfants les grands principes de la numération en base dix.