M6. Méthodes relatives à la PROPORTIONNALITE

Nous avons vu en S13 que la proportionnalité se rencontre dans différents cadres. Elle reflète une relation entre deux grandeurs qui se traduit mathématiquement par une fonction linéaire. Les problèmes du champ multiplicatif qui en découlent peuvent se résoudre selon diverses procédures. Il est intéressant d'en connaître plusieurs afin de choisir celle qui fait gagner en efficacité selon le contexte, les données numériques et le sens.

I. Les différents cadres

➢ Cadre numérique (contextuel)

10kg de pommes coûtent 25€. Compléter ce tableau :

Poids des pommes (kg)	10	5	**1**	3	**7**			**9**
Prix des pommes (€)	25	**12,5**	**2,5**			125	60	22,50

Coefficient de proportionnalité :
Opérateur qui lie les deux grandeurs
$25:10=2,5$ soit l'opérateur $\times 2,5$
$3\times 2,5=?$ $\quad 22,50:2,5=?$
$3\times 2,5=7,5$ $\quad 22,50:2,5=9$

Linéarité multiplicative
Opérateur qui lie deux valeurs d'une même grandeur
$10:2=5$ d'où $25:2=?$
$25:2=12,5$

Linéarité additive
$3+7=10$
$f(3)+f(7)=f(10)=25$
$f(7)=25-7,5=17,5$

Le coefficient de proportionnalité permet de trouver le prix d'un kilo de pommes. On peut alors trouver le nombre de kilos achetés pour 125€, soit 50kilos, pour 60€, soit 24kilos.

➢ Cadre algébrique

Exemple 1

Une épreuve d'entrainement à un concours dure 2 heures et est noté sur 15points. Un exercice vaut 4 points. Combien de temps y consacrer ?

Temps (min)	120	x?
Valeur	15	4

Par le coefficient de proportionnalité
$120:15=8 \qquad 4\times 8=32\,\text{minutes}$

Par l'égalité des produits en croix
$15\times x=120\times 4 \qquad x=(120\times 4):15=32\,\text{minutes}$

Par la règle de trois
$$\frac{120\times 4}{15}=32\,\text{minutes}$$

© PariMaths.com
Catherine Marchetti-Jacques
Digitally signed by Catherine Marchetti-Jacques
DN: cn=Catherine Marchetti-Jacques, o=PariMaths.com, ou, email=info@parimaths.com, c=FR
Date: 2011.07.07 09:56:34 -06'00'

↘ On peut remarquer que ces trois calculs sont identiques dans la forme (on multiplie 120 par 4, et on divise ce produit par 15). C'est bien dans le sens qu'ils sont différents et la règle de trois qui vient de refaire son apparition dans les programmes de l'école 2008, est celui qui en est le plus dépourvu ! Le coefficient de proportionnalité donne du sens à la valeur de l'unité (le quotient de 120 par 15 correspond au temps passé pour gagner 1 point, soit 8 minutes). Quant à l'égalité des produits en croix, elle prend sens dans l'égalité des quotients $\frac{120}{15} = \frac{x}{4}$. L'utilisation « technique » de la règle de trois amène souvent des erreurs dans le choix des données numériques que l'on multiplie ou que l'on divise.

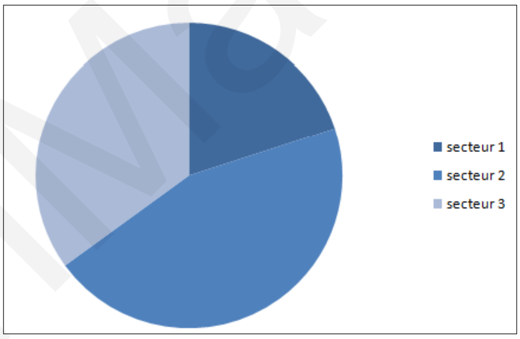
Exemple 2

Pour réaliser un diagramme circulaire, il faut partager le disque en secteurs circulaires dont l'aire est proportionnelle aux données que l'on veut représenter. Cette aire est elle-même proportionnelle à l'angle au centre du secteur. Ces angles peuvent se déterminer par l'application du coefficient de proportionnalité, par l'égalité des produits en croix ou une règle de trois.

	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Total
Effectif (%)	20	45	35	100
Angle au centre	72°	162°	126°	360°

$\times 3,6$

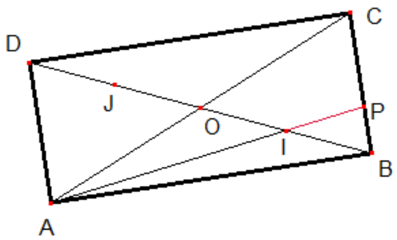
$\frac{20 \times 360}{100} = 72°$ $\frac{45 \times 360}{100} = 162°$ $\frac{35 \times 360}{100} = 126°$



- **Cadre géométrique**

Exemple 1

On considère la figure suivante où ABCD est un rectangle, $AB = 4cm$ et $AD = 3cm$ Calculer BP et IP, sachant que O est le milieu de [DB] et I le milieu de [OB], et J le milieu de [OD].



© PariMaths.com

Comme O est le milieu de [DB], alors $OD = OB$. Comme I est le milieu de [OB], alors $OI = IB$. Comme J le milieu de [OD], alors $OJ = JD$. On en déduit que $DJ = JO = OI = IB$ et donc que $ID = 3IB$ soit $\frac{ID}{IB} = 3$.

Les droites (AD) et (BP) sont parallèles, les droites (AP) et (BD) sont sécantes en I.

D'après le théorème de Thalès, les mesures des longueurs des côtés des triangles IAD et IPB sont proportionnelles donc $\frac{IA}{IP} = \frac{ID}{IB} = \frac{AD}{BP}$. On en déduit que $\frac{IA}{IP} = 3$ et $\frac{AD}{BP} = 3$ avec $AD = 3cm$, d'où $3 = \frac{3}{BP}$ donc $BP = 1cm$

ABCD étant un rectangle, APB est un triangle rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore,

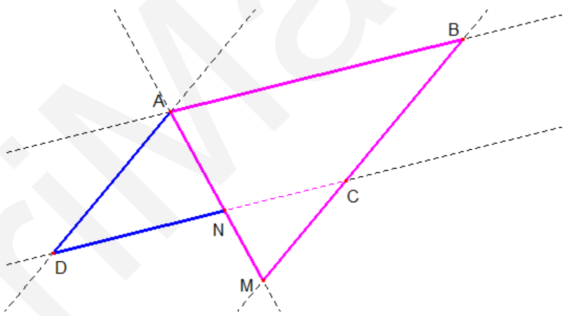
$AP^2 = BP^2 + AB^2$. $\quad AP^2 = 1^2 + 4^2 = 17$, d'où $AP = \sqrt{17}$.

Comme $\frac{IA}{IP} = 3$, alors $IA = 3IP$ et $AP = IA + IP = 3IP + IP = 4IP$, d'où $IP = \frac{1}{4}AP = \frac{1}{4}\sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{4}$

Exemple 2

ABCD est un parallélogramme, N un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.

En déduire que $DN \times BM = AB \times AD$



Deux triangles sont semblables, si leurs angles sont égaux deux à deux. On en déduit alors que les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

ABCD étant un parallélogramme, ses angles opposés sont égaux et $\widehat{ADN} = \widehat{ABM}$. De plus $\widehat{DAN} = \widehat{AMB}$ comme angles alternes internes, les droites (AD) et (BM) étant deux droites parallèles coupées par la sécante (AM). On en déduit que $\widehat{AND} = \widehat{MAB}$. Donc les triangles ADN et ABM sont semblables.

Ainsi $\frac{AD}{MB} = \frac{DN}{BA} = \frac{AN}{MA}$. On peut alors en déduire que $DN \times BM = AB \times AD$.

Le coefficient d'agrandissement est aussi appelé de rapport de similitude.

© PariMaths.com

- **Cadre fonctionnel**

Exemple 1

Trouver le prix hors taxe d'un article vendu 368 euros, la taxe étant de 15%.

On ne peut pas calculer directement le montant de cette taxe car on ne connaît pas le prix initial.

$$P_{TTC} = P_{HT} + P_{HT} \times \frac{15}{100} = P_{HT} \times (1 + \frac{15}{100}) = \frac{115}{100} \times P_{HT}$$

$P_{TTC} = 1{,}15 \times P_{HT} = 368$ donc $P_{HT} = P_{TTC}:1{,}15 = 368:1{,}15 = 320$. Le prix TTC est de 320€.

➘ On retiendra que pour trouver un prix P_{TTC}, on peut toujours calculer le montant des taxes (ou l'exprimer par rapport au prix initial) et l'ajouter au prix P_{HT}. Par contre pour retrouver un prix P_{HT} connaissant le prix P_{TTC}, il est bien plus facile d'utiliser directement le coefficient de proportionnalité qui fait passer du prix P_{TTC} au prix P_{HT}. Par exemple, pour des taxes de 15% : $P_{HT} \underset{\div 1{,}15}{\overset{\times 1{,}15}{\rightleftarrows}} P_{TTC}$

Exemple 2

En automne, une nuit d'hôtel dans une station de ski coûte 52 euros. En hiver, elle augmente de 30%, et au printemps elle baisse de 20%. Quelle est l'augmentation depuis l'automne ?

On peut passer du cadre numérique au cadre fonctionnel en exprimant le nouveau prix en fonction du prix initial. $P_1 \xrightarrow{\times 1{,}3} \mathbf{P_2} \xrightarrow{\times 0{,}8} P_3$; $P_1 \xrightarrow[\times ?]{} P_3$

En hiver, $P_2 = P_1 + \frac{30}{100} \times P_1 = \frac{130}{100} \times P_1 = 1{,}3 \times P_1$. De même $P_3 = (\frac{100}{100} - \frac{20}{100}) \times P_2 = \frac{80}{100} \times P_2 = 0{,}8 \times P_2$

D'où $P_3 = 0{,}8 \times 1{,}3 \times P_1 = 1{,}04 \times P_1$ *soit* $P_3 = P_1 + \frac{4}{100} P_1$, d'où 4% d'augmentation entre P_1 et P_3

➘ On retiendra qu'une augmentation de 30% sur un prix P_1 se traduit par un coefficient de proportionnalité de 1,3 soit $P_2 = 1{,}3 \times P_1$ ou encore $P_1 = P_2 : 1{,}3$. De même une réduction de 20% sur un prix P_1 se traduit par un coefficient de proportionnalité de 0,8 soit $P_2 = 0{,}8 \times P_1$ ou encore $P_1 = P_2 : 0{,}8$

- **Cadre fonctionnel et graphique**

Mr B. effectue, plusieurs fois dans l'année, le même trajet en avion. Son agence de voyages lui propose deux possibilités et il se demande à partir de quel nombre de voyages l'abonnement est intéressant. Voici les deux tarifs : Tarif A : 250 € chaque trajet Tarif B : 800 € d'abonnement annuel et chaque trajet à demi-tarif. Exprimer, en fonction du nombre *x* de trajets, les tarifs *A (x) et B(x).* Déterminer graphiquement la réponse à son questionnement.

© Parimaths.com

Avec le tarif A, le prix est proportionnel au nombre de trajets. $A(x)$ est l'image de x par la fonction linéaire définie par $x \mapsto 250x$, soit $A(x) = 250\,x$

Avec le tarif B, $B(x)$ est l'image de x par la fonction affine définie par $x \mapsto 125\,x + 800$, soit $B(x) = 125\,x + 800$

La représentation graphique des ces deux fonctions donne deux demi-droites passant par l'origine. On peut y lire pour un nombre de trajets choisi sur l'axe des abscisses, le prix associé à chacun de ces tarifs sur l'axe des ordonnées.

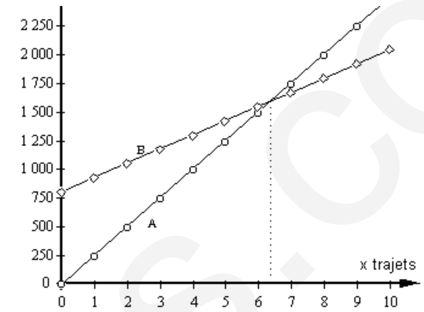
Ainsi par exemple, pour $x = 2$

$A(2) = 500$ *et* $1000 < B(2) < 1250$

On constate ainsi que jusqu'à $x = 6, A(x) < B(x)$

et que pour $x \geq 7, A(x) \geq B(x)$.

Donc à partir de 7 voyages, le tarif B est plus intéressant.



© PariMaths.com